



عملیات سطری مقدماتی، فضای برداری، زیرفضا

تمرین اول

تاریخ انتشار: ۲ اسفند ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

سوالات تئوری

پرسش ۱ (۰ نمره) نشان دهید که $M_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

همچنین بررسی کنید که اگر V_1 زیرفضایی از $M_n(\mathbb{R})$ باشد که ماتریس‌ها متقارن باشند، آیا زیرفضای V_2 از $M_n(\mathbb{R})$ وجود دارد به صورتی که $V_1 \oplus V_2 = M_n(\mathbb{R})$ ؟

پرسش ۲ (۰ نمره) $\mathbb{R}^+$ را مجموعه اعداد حقیقی نامنفی در نظر بگیرید. در هر مورد جداگانه فضای برداری بودن این مجموعه با میدان اعداد حقیقی را بررسی کنید. در هر مورد عملگر اول جمع برداری و عملگر دوم ضرب اسکالر است.

$$x \boxplus y = xy, \quad x, y \in \mathbb{R}^+$$

$$a \boxdot x = x^a, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$x \boxplus y = xy, \quad x, y \in \mathbb{R}^+$$

$$a \boxtimes x = a^x, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad a \in \mathbb{R}$$

پرسش ۳ (۰ نمره) V را یک فضای برداری بگیرید که $W \subset V$ یک زیرفضا است. دو بردار $u, v \in V$ را به پیمانه W هم نهشت مینامیم اگر $u - v \in W$.

(آ) نشان دهید که این تعریف یک رابطه هم ارزی روی V ایجاد میکند که به صورت $u \sim_W v$ نشان میدهیم. (راهنمایی: خواص یک رابطه هم ارزی که به صورت زیر است را اثبات کنید)

$$\forall v, u, z \in V :$$

$$v \sim_W v$$

$$u \sim_W v \implies v \sim_W u$$

$$u \sim_W v \wedge v \sim_W z \implies u \sim_W z$$

(ب) اکنون کلاس هم ارزی بردار $u \in V$ را به صورت $[u]_W = \{v \in V \mid v \sim_W u\}$ تعریف میکنیم. نشان دهید $[0]_W = W$

(ج) اثبات کنید مجموعه کلاس‌های هم ارزی که به صورت $V/W = \{[u] \mid u \in V\}$ تعریف می‌شود و فضای خارج قسمت نامیده می‌شود، یک فضای برداری با اعمال زیر تشکیل می‌دهد. همچنین عنصر خنثی این فضا را معرفی کنید.

$$u, v \in V, \quad c \in F$$

$$[u]_W + [v]_W = [u + v]_W$$

$$c[u]_W = [cu]_W$$

پرسش ۴ (۰ نمره) $V = C^*[a, b]$ را فضای برداری توابع $f(t)$ که روی بازه $0 \leq t \leq 1$ پیوسته اند در نظر بگیرید. کدام شروط زیر یک زیرفضا از V را تعریف می کنند؟

(آ) $f(0) = 0$

(ب) $f(0) = 2f(1)$

(ج) $f(0)f(1) = 1$

(د) $f(0) = 0 \vee f(1) = 0$

(ه) $f(1-t) = -tf(t)$

(و) $f(1-t) = 1 - f(t)$

(ز) $f(\frac{1}{t}) = \int_1^t f(t)dt$

(ح) $\int_1^t (t-1)f(t)dt = 0$

(ط) $\int_0^t f(s) \sin s ds = \sin t$

پرسش ۵ (۰ نمره) با استفاده از ماتریس افزوده و عملیات های سطری پایه تعیین کنید که دو ماتریس زیر باید در چه ماتریسی ضرب شوند تا حاصل ماتریس همانی شود.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 16 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 8 \\ -1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

پرسش ۶ (۰ نمره) تمام ماتریس های پایه ای^۱ که باید در ماتریس A ضرب شوند تا ماتریس B حاصل شود را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پرسش ۷ (۰ نمره) ابتدا دو دستگاه معادلات داده شده را به کمک ماتریس افزایش یافته و فرم پلکانی حل کنید و سپس بررسی کنید که آیا دو دستگاه جواب مشترک دارند یا خیر.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -7 \end{cases}$$

پرسش ۸ (۰ نمره) با ذکر دلیل مشخص کنید که مجموعه های معرفی شده فضای برداری هستند یا خیر؟

(آ) مجموعه برداری های $U = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ با تعریف عملگر ضرب عادی اعداد حقیقی و جمع به صورت:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (\min(x_1, x_2), \min(y_1, y_2))$$

(ب) مجموعه برداری های $U = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ با تعریف عملگر جمع عادی اعداد حقیقی و ضرب اسکالر به صورت:

$$c \otimes (x_1, y_1) = (\cos(c)x_1, (-1)^{\lfloor c \rfloor} y_1)$$

^۱ماتریس های پایه: elementary matrices