



جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۴

فضای برداری، زیرفضا و دستگاه خطی

تمرین تئوری اول

تاریخ انتشار: ۲۸ مهر ۱۴۰۴

پرسش ۱ (۰ نمره)

فرض کنید $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ و

$$S(A) = \{X \in M_{n \times p}(\mathbb{C}) \mid AX = 0\}.$$

الف) نشان دهید $S(A)$ یک زیرفضای $M_{n \times p}(\mathbb{C})$ است.
ب) اگر $m = n$ ، نشان دهید برای هر عدد صحیح مثبت k داریم

$$S(A) \subseteq S(A^2) \subseteq \dots \subseteq S(A^k) \subseteq S(A^{k+1}).$$

ج) نشان دهید این زنجیره زیرفضای افزایشی بالا بالاخره ثابت می‌ماند؛ یعنی وجود دارد عدد صحیح مثبت r طوری که

$$S(A^r) = S(A^{r+1}) = S(A^{r+2}) = \dots.$$

پاسخ

الف) برای نشان دادن اینکه $S(A)$ زیرفضایی است کافی است بسته بودن نسبت به جمع و ضرب اسکالر را نشان دهیم. اگر $X, Y \in S(A)$ و c اسکالری دلخواه باشد، آنگاه

$$A(X + Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0,$$

و

$$A(cX) = c(AX) = c \cdot 0 = 0.$$

بنابراین $X + Y \in S(A)$ و $cX \in S(A)$ پس $S(A)$ زیرفضا است.

ب) اگر $m = n$ آنگاه A مربعی است و توان‌های A تعریف دارند. اگر $X \in S(A^k)$ یعنی $A^k X = 0$ ، آنگاه

$$A^{k+1} X = A(A^k X) = A \cdot 0 = 0,$$

بنابراین $X \in S(A^{k+1})$. این نشان می‌دهد $S(A^k) \subseteq S(A^{k+1})$. با تکرار همین استدلال می‌گیریم

$$S(A) \subseteq S(A^2) \subseteq S(A^3) \subseteq \dots.$$

ج) هر مجموعه $S(A^k)$ زیرفضایی از $M_{n \times p}(\mathbb{C})$ است. فضای $M_{n \times p}(\mathbb{C})$ بعد متناهی np دارد، پس دنباله ابعاد

$$\dim S(A) \leq \dim S(A^2) \leq \dim S(A^3) \leq \dots$$

یک دنباله صعودی از اعداد صحیح غیرمنفی است که به‌طور طبیعی توسط np محدود می‌شود. پس وجود دارد عدد صحیح مثبت r طوری که $\dim S(A^r) = \dim S(A^{r+1})$. از آنجا که داریم $S(A^r) \subseteq S(A^{r+1})$ و ابعاد برابرند، نتیجه می‌شود

$$S(A^r) = S(A^{r+1}).$$

با اعمال همین استدلال برای گام‌های بعدی به‌دنبال هم می‌آید

$$S(A^r) = S(A^{r+1}) = S(A^{r+2}) = \dots,$$

که همان ادعای خواسته است.

پرسش ۲ (۰ نمره)

فرض کنید

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid a + d = 0 \right\}.$$

نشان دهید که V یک زیرفضا از $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ است.

پاسخ

۱. ماتریس صفر در V وجود دارد زیرا $a = d = 0 \Rightarrow a + d = 0$. اگر $A, B \in V$ باشند، آنگاه $(a_1 + d_1) = 0$ و $(a_2 + d_2) = 0$ ، پس $(a_1 + d_1) + (a_2 + d_2) = 0$ ، بنابراین $A + B \in V$. ۲. اگر $a = d = 0$ ، آنگاه $ca + cd = c(a + d) = 0$ و داریم $ca + cd = c(a + d) = 0$. ۳. اگر c اسکالر باشد، آنگاه $ca + cd = c(a + d) = 0$ و داریم $ca + cd = c(a + d) = 0$. تحت جمع و ضرب اسکالر است و یک زیرفضا محسوب می‌شود.

پرسش ۳ (۰ نمره) ثابت کنید اجتماع تعدادی متناهی از زیرفضاهای V زیرفضای V است اگر و تنها اگر یکی از آنها شامل بقیه باشد. آیا فرض متناهی بودن لازم است؟

پاسخ

فرض کنید یکی از زیرفضاها شامل بقیه باشد. آنگاه اجتماع همه زیرفضاها برابر همین زیرفضا خواهد بود که خود یک زیرفضاست. برای اثبات عکس آن از استقرا استفاده می‌کنیم.

پایه استقرا: $n = 2$. فرض کنید هیچ‌کدام دیگری را شامل نباشد. بنابراین بردارهای ناصفر u, v وجود دارند که

$$v \in W_1, \quad v \notin W_2, \quad u \in W_2, \quad u \notin W_1.$$

اگر اجتماع W_1 و W_2 یک زیرفضا باشد، آنگاه $u + v$ نیز باید در آن باشد. ولی

$$u + v \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow u + v \in W_1 \vee u + v \in W_2.$$

اگر $u + v \in W_1$ و $v \in W_1$ ، آنگاه $u = (u + v) - v \in W_1$ ، که تناقض است. اگر $u + v \in W_2$ و $u \in W_2$ ، آنگاه $v = (u + v) - u \in W_2$ ، که باز هم تناقض است. بنابراین پایه استقرا ثابت می‌شود.

گام استقرا. فرض کنید برای هر مجموعه‌ای از n زیرفضا حکم سؤال برقرار باشد. اکنون برای $n + 1$ زیرفضا ثابت می‌کنیم. فرض کنید این زیرفضاها $W_1, \dots, W_{n+1}$ باشند. برهان خلف بزنید و فرض کنید حکم برقرار نباشد؛ یعنی اجتماع همه این $n + 1$ زیرفضا یک زیرفضا باشد و هیچ‌کدام شامل دیگری نباشد.

ادعا:

$$W_{n+1} \not\subseteq \bigcup_{j=1}^n W_j \quad \text{و} \quad \bigcup_{j=1}^n W_j \not\subseteq W_{n+1}.$$

اثبات ادعا: فرض کنید $W_{n+1} \subseteq \bigcup_{j=1}^n W_j$. در این صورت

$$\bigcup_{j=1}^n W_j = \bigcup_{j=1}^{n+1} W_j,$$

یعنی اجتماع n زیرفضا $W_1, \dots, W_n$ یک زیرفضا شده است، بنابراین طبق فرض استقرا وجود دارد $1 \leq i \leq n$ طوری که

$$\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} W_j \subseteq W_i$$

که از آن نتیجه می‌شود $\bigcup_{j=1}^n W_j = W_i$ و در نتیجه $W_i = \bigcup_{j=1}^{n+1} W_j$. پس W_i شامل همه زیرفضاها می‌شود که با فرض اولیه اینکه هیچ‌کدام دیگری را شامل نمی‌شود در تناقض است. بنابراین فرض $W_{n+1} \subseteq \bigcup_{j=1}^n W_j$ نادرست است.

به‌طور مشابه اگر $\bigcup_{j=1}^n W_j \subseteq W_{n+1}$ آنگاه $\bigcup_{j=1}^n W_j \subseteq W_{n+1}$ همه را شامل می‌شود که دوباره تناقض ایجاد می‌کند. این‌گونه ادعا ثابت می‌شود. از ادعای اثبات‌شده نتیجه می‌شود که دو بردار وجود دارند:

$$\exists v \neq 0 \text{ که } v \in W_{n+1}, v \notin \bigcup_{j=1}^n W_j,$$

و

$$\exists w \neq 0 \text{ که } w \in \bigcup_{j=1}^n W_j, w \notin W_{n+1}.$$

از طرفی $\bigcup_{j=1}^n W_j$ فرض شده زیرفضا باشد، بنابراین همه بردارهای

$$w, w + v, w + 2v, \dots, w + nv$$

در آن قرار دارند. از طرف دیگر هیچ‌یک از این بردارها در W_{n+1} قرار ندارند؛ زیرا اگر برای $c \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $w + cv \in W_{n+1}$ از آن‌جا که $v \in W_{n+1}$ خواهیم داشت $w = (w + cv) - cv \in W_{n+1}$ ، که با $w \notin W_{n+1}$ تناقض دارد.

پس همه بردارهای $w + cv$ (برای $c = 0, 1, \dots, n$) در $\bigcup_{j=1}^n W_j$ قرار دارند اما هیچ‌کدام در W_{n+1} نیستند. طبق اصل لانه کبوتری، دو عدد مختلف s و t وجود دارند با $1 \leq s < t \leq n$ و اندیس i (که $1 \leq i \leq n$) به طوری که

$$w + sv \in W_i, \quad w + tv \in W_i.$$

در نتیجه

$$(t - s)v = (w + tv) - (w + sv) \in W_i.$$

از آن‌جا که $t - s \neq 0$ ، بنابراین $v \in W_i \subseteq \bigcup_{j=1}^n W_j$ ، که با انتخاب v که خارج از $\bigcup_{j=1}^n W_j$ بود، تناقض دارد. بنابراین فرض خلف به تناقض می‌انجامد و حکم برای $n + 1$ نیز برقرار است.

فرض متناهی بودن مجموعه زیرفضاها لازم است. به‌عنوان نمونه متناقض در حالت نامتناهی، فضای V را برابر صفحه $\mathbb{R}^2$ و زیرفضاها را همه خطوطی که از مبدأ می‌گذرند در نظر بگیرید. هیچ‌کدام از این خطوط دیگری را شامل نمی‌کند، ولی اجتماع تمام آن‌ها برابر $\mathbb{R}^2$ است که خود یک زیرفضاست.

فرض کنید W_1 و W_2 زیر فضاهایی از فضای برداری V باشند و جمع آن‌ها به صورت زیر تعریف شود:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

(الف) نشان دهید که $W_1 \cap W_2$ و $W_1 + W_2$ زیر فضاهای V هستند و رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2.$$

(ب) با استفاده از دو خطی که از مبدأ مختصات در صفحه‌ی xy می‌گذرند، شمول‌های قسمت (الف) را به صورت هندسی توضیح دهید.

(ج) چه زمانی اجتماع $W_1 \cup W_2$ یک زیر فضای V است؟

(د) نشان دهید که $W_1 + W_2$ کوچک‌ترین زیر فضای V است که شامل $W_1 \cup W_2$ می‌باشد؛ یعنی اگر S زیر فضایی از V باشد به‌طوری‌که $W_1 \cup W_2 \subseteq S$ ، آنگاه داریم $W_1 + W_2 \subseteq S$.

پاسخ

(الف) فرض کنید W_1, W_2 زیر فضاهای V باشند. آنگاه $\bullet \in W_1 \cap W_2$ و اگر $u, v \in W_1 \cap W_2$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ آنگاه $\alpha u \in W_1 \cap W_2$ ، پس $W_1 \cap W_2$ زیرفضاست. به طور مشابه اگر $x = w_1 + w_2$ و $y = w'_1 + w'_2$ با $w_i, w'_i \in W_i$ آنگاه $x + y = (w_1 + w'_1) + (w_2 + w'_2) \in W_1 + W_2$ و $\alpha x = (\alpha w_1) + (\alpha w_2) \in W_1 + W_2$ ، پس $W_1 + W_2$ نیز زیرفضاست. همچنین واضح است که $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

(ب) فرض کنید W_1 و W_2 به ترتیب محور x و خط $y = x$ باشند. در این صورت $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ و $W_1 + W_2$ کل صفحه‌ی xy است.

(ج) به طور کلی $W_1 \cup W_2$ زیرفضا نیست؛ مثلاً اگر W_1 و W_2 به ترتیب محورهای x و y باشند. اتحاد دو زیرفضا تنها زمانی زیرفضا است که یکی در دیگری شامل باشد، یعنی $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$ ، در این صورت $W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$ خواهد بود.

(د) اگر S زیر فضایی باشد که W_1 و W_2 را دربرگیرد، در این صورت هر بردار از فرم $w_1 + w_2$ با $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$ در S قرار دارد، پس $W_1 + W_2 \subseteq S$ است.

مثالی از سه زیر فضای W_1, W_2, W_3 از یک فضای برداری V بیاورید چنان‌که

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) \neq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3).$$

پاسخ به عنوان مثال نقض، فرض کنید W_1, W_2 و W_3 به ترتیب محورهای x, y و خط $y = x$ باشند.

فرض کنید $f \in C(\mathbb{R})$. می‌گوییم f زوج است اگر

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

و f فرد است اگر

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

فرض کنید W_1 و W_2 به ترتیب مجموعه‌ی توابع پیوسته زوج و توابع پیوسته فرد روی $\mathbb{R}$ باشند. نشان دهید که W_1 و W_2 زیر فضاهایی از $C(\mathbb{R})$ هستند و همچنین نشان دهید

$$C(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2.$$

($C(\mathbb{R})$ نشان دهنده تمام توابع پیوسته روی اعداد حقیقی است.)

پاسخ

فرض کنید f و g توابع زوج باشند. در این صورت برای هر $r \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(f + rg)(-x) = f(-x) + rg(-x) = f(x) + rg(x) = (f + rg)(x),$$

بنابراین $f + rg \in W_1$ و در نتیجه W_1 یک زیرفضا است. به طور مشابه، W_2 نیز یک زیرفضا است. اکنون برای هر $f \in C(\mathbb{R})$ می‌توان نوشت:

$$f = f_e + f_o,$$

که در آن:

$$f_e = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad f_o = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

در نتیجه $C(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$ و به وضوح $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. پس $C(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$. توابع زیادی وجود دارند که نه زوج و نه فرد هستند.

ماتریس زیر داده شده است. آن را به فرم سطری کاهش یافته (RREF) ببرید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

پاسخ

ابتدا نصف سطر اول را جایگزین سطر اول می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

سپس سطرهای دوم و سوم را طوری تغییر می‌دهیم که ستون اول به جز در سطر اول صفر شود:

$$-R_1 + R_2 \rightarrow R_2, \quad -2R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

سطر دوم را در ضریب $-\frac{2}{3}$ ضرب می‌کنیم تا محور دوم برابر ۱ شود:

$$-\frac{2}{3}R_2 \rightarrow R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{20}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

اکنون سطر سوم را با سطر دوم کم می‌کنیم:

$$-R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{35}{3} \end{bmatrix}$$

و سطر سوم را در $\frac{3}{5}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{3}{5}R_3 \rightarrow R_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

حال با جایگذاری معکوس داریم:

$$x_3 = 7, \quad x_2 = 5, \quad x_1 = 3$$

در نتیجه فرم سطری کاهش یافته برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

پرسش ۸ (۰ نمره) معادلات زیر را به شکل ماتریس افزایش یافته بنویسید و آن‌ها را به کمک تشکیل فرم کاهش یافته سطری پلکانی حل کنید.
(الف)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -7 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -3x_1 + 12x_2 - 15x_3 = 10 \end{cases}$$

پاسخ (الف) فرم کاهش یافته ماتریس به شکل زیر است:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 8$$

(ب) فرم کاهش یافته ماتریس به شکل زیر است:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array} \right]$$

از روی ماتریس بالا متوجه می شویم که معادله ناسازگار است و جواب ندارد.