

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۳



استقلال خطی، بعد و پایه، مرتبه و زیرفضا

تمرین دوم

تاریخ انتشار: ۱۸ اسفند ۱۴۰۳

پرسش ۱ (الف) نشان دهید که هیچ زیرمجموعه خطی مستقلی از $\mathbb{R}^3$ نمی‌تواند بیش از سه بردار داشته باشد.
(ب) نشان دهید که هیچ زیرمجموعه اسپن کننده از $\mathbb{R}^3$ شامل کمتر از سه بردار نمی‌شود.

پرسش ۲ فرض کنید V فضای برداری 1 (حقیقی) تمام توابع چندجمله‌ای از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ با درجه حداکثر ۲ باشد، یعنی فضای توابعی به شکل زیر:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2.$$

همچنین فرض کنید t یک عدد حقیقی ثابت باشد و توابع زیر تعریف شده باشند:

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = x + t, \quad g_3(x) = (x + t)^2.$$

ثابت کنید که $B = \{g_1, g_2, g_3\}$ یک پایه برای V است.
اگر

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

باشد، مختصات f در پایه مرتب شده B چیست؟

پرسش ۳ فرض کنید:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

که یک ماتریس حقیقی است و نالیتی آن برابر با k است. فرض کنید:

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

پایه‌ای برای فضای نال A است. این مجموعه را با افزودن بردارهای

$$\{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$$

به پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ گسترش دهید، به طوری که:

$$B = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$$

یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ باشد.

به سوالات زیر پاسخ دهید:

(الف) ثابت کنید اگر یک بردار w در

$$X = \text{span}\{w_1, \dots, w_{n-k}\}$$

در این رابطه برقرار باشد:

$$Aw = 0$$

آنگاه w باید بردار صفر باشد.

(ب) ثابت کنید مجموعه

$$\{Aw_1, Aw_2, \dots, Aw_{n-k}\}$$

یک پایه برای فضای ستون‌های A تشکیل می‌دهد و نتیجه بگیرید که:

$$\dim(\text{col}(A)) = n - k$$

پرسش ۴ فرض کنید $v_1, v_2, \dots, v_k$ بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ باشند. ثابت کنید که اگر مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ مستقل خطی باشد، آنگاه مجموعه $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_k + v_1\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر k فرد باشد.

پرسش ۵ اگر $v_1, v_2, \dots, v_m$ مجموعه ای از بردارهای مستقل خطی در فضای برداری V باشند، و $u_1, u_2, \dots, u_n$ ترکیب هایی از آنها به این صورت باشند:

$$u_k = \sum_{i=1}^m a_{ik} v_i, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

آنگاه ثابت کنید اگر $n > m$ باشد، $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ يك مجموعه وابسته خطی است.

پرسش ۶ فرض کنید ماتریس های $A_{m \times n}$ و $B_{m \times k}$ موجود باشند. گزاره زیر را اثبات یا رد کنید:

ماتریسی مانند X وجود دارد به طوری که $AX = B$ ، اگر و تنها اگر $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A:B)$ (منظور از $A:B$ ماتریس افزوده A و B است).

پرسش ۷ فرض کنید $R[t]_n := V$ فضای برداری چندجمله ای هایی با درجه کمتر از n با ضرایب حقیقی باشد. فرض کنید $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ اعداد حقیقی دلخواهی باشند، نشان دهید برای هر i يك چندجمله ای منحصر به فرد وجود دارد که در تمام r_j ها به جز r_i برابر صفر می شود و در r_i برابر يك می شود. يك فرمول صریح برای f_i ارائه دهید و سپس نشان دهید $f_1, f_2, \dots, f_n$ يك پایه را برای V تشکیل می دهند.

پرسش ۸ فرض کنید A يك ماتریس $M \times N$ باشد. ثابت کنید که رنک $A^T A$ برابر با رنک A است. یعنی:

$$\text{null}(A^T A) = \text{null}(A)$$

پرسش ۹ فرض کنید A يك ماتریس $n \times n$ باشد. ثابت کنید اگر $\text{rank}(A) = r$ باشد، آنگاه ماتریس های B و C وجود دارند به طوری که $A = BC$ که در آن B يك ماتریس $n \times r$ و C يك ماتریس $r \times n$ است.

پرسش ۱۰ فرض کنید A يك ماتریس $n \times n$ باشد. اگر $\text{rank}(A) = r$ باشد، آنگاه ثابت کنید نامساوی زیر برقرار است:

$$\text{rank}(A^2) \geq 2r - n.$$