

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۳



استقلال خطی، بعد و پایه، مرتبه و زیرفضا

تمرین دوم

تاریخ انتشار: ۱۸ اسفند ۱۴۰۳

پرسش ۱ (الف) نشان دهید که هیچ زیرمجموعه خطی مستقلی از $\mathbb{R}^3$ نمی‌تواند بیش از سه بردار داشته باشد.
(ب) نشان دهید که هیچ زیرمجموعه اسپن کننده از $\mathbb{R}^3$ شامل کمتر از سه بردار نمی‌شود.

پرسش ۲ فرض کنید V فضای برداری 1 (حقیقی) تمام توابع چندجمله‌ای از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ با درجه حداکثر ۲ باشد، یعنی فضای توابعی به شکل زیر:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2.$$

همچنین فرض کنید t یک عدد حقیقی ثابت باشد و توابع زیر تعریف شده باشند:

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = x + t, \quad g_3(x) = (x + t)^2.$$

ثابت کنید که $B = \{g_1, g_2, g_3\}$ یک پایه برای V است.
اگر

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

باشد، مختصات f در پایه مرتب شده B چیست؟

پرسش ۳ فرض کنید:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

که یک ماتریس حقیقی است و نالیتی آن برابر با k است. فرض کنید:

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

پایه‌ای برای فضای نال A است. این مجموعه را با افزودن بردارهای

$$\{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$$

به پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ گسترش دهید، به طوری که:

$$B = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$$

یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ باشد.

به سوالات زیر پاسخ دهید:

(الف) ثابت کنید اگر یک بردار w در

$$X = \text{span}\{w_1, \dots, w_{n-k}\}$$

در این رابطه برقرار باشد:

$$Aw = 0$$

آنگاه w باید بردار صفر باشد.

(ب) ثابت کنید مجموعه

$$\{Aw_1, Aw_2, \dots, Aw_{n-k}\}$$

یک پایه برای فضای ستون‌های A تشکیل می‌دهد و نتیجه بگیرید که:

$$\dim(\text{col}(A)) = n - k$$

پرسش ۴ فرض کنید $v_1, v_2, \dots, v_k$ بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ باشند. ثابت کنید که اگر مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ مستقل خطی باشد، آنگاه مجموعه $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_k + v_1\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر k فرد باشد.

پرسش ۵ اگر $v_1, v_2, \dots, v_m$ مجموعه ای از بردارهای مستقل خطی در فضای برداری V باشند، و $u_1, u_2, \dots, u_n$ ترکیب هایی از آنها به این صورت باشند:

$$u_k = \sum_{i=1}^m a_{ik} v_i, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

آنگاه ثابت کنید اگر $n > m$ باشد، $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ يك مجموعه وابسته خطی است.

پرسش ۶ فرض کنید ماتریس های $A_{m \times n}$ و $B_{m \times k}$ موجود باشند. گزاره زیر را اثبات یا رد کنید:

ماتریسی مانند X وجود دارد به طوری که $AX = B$ ، اگر و تنها اگر $Rank(A) = Rank(A:B)$ (منظور از $A:B$ ماتریس افزوده A و B است).

پرسش ۷ فرض کنید $R[t]_n := V$ فضای برداری چندجمله ای هایی با درجه کمتر از n با ضرایب حقیقی باشد. فرض کنید $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ اعداد حقیقی دلخواهی باشند، نشان دهید برای هر i يك چندجمله ای منحصر به فرد وجود دارد که در تمام r_j ها به جز r_i برابر صفر می شود و در r_i برابر يك می شود. يك فرمول صریح برای f_i ارائه دهید و سپس نشان دهید $f_1, f_2, \dots, f_n$ يك پایه را برای V تشکیل می دهند.

پرسش ۸ فرض کنید A یک ماتریس $M \times N$ باشد. ثابت کنید که رنک $A^T A$ برابر با رنک A است. یعنی:

$$\text{null}(A^T A) = \text{null}(A)$$

پرسش ۹ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. ثابت کنید اگر $\text{rank}(A) = r$ باشد، آنگاه ماتریس های B و C وجود دارند به طوری که $A = BC$ که در آن B یک ماتریس $n \times r$ و C یک ماتریس $r \times n$ است.

پرسش ۱۰ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. اگر $\text{rank}(A) = r$ باشد، آنگاه ثابت کنید نامساوی زیر برقرار است:

$$\text{rank}(A^r) \geq r - n.$$

پاسخ ۱ (الف) هر چهار بردار از $\mathbb{R}^3$ به هم وابسته اند زیرا معادله برداری

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} c_2 + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} c_3 + \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

منجر به ایجاد یک سیستم معادلات خطی می شود که در آن:

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 + x_4 c_4 = 0, \quad y_1 c_1 + y_2 c_2 + y_3 c_3 + y_4 c_4 = 0, \quad z_1 c_1 + z_2 c_2 + z_3 c_3 + z_4 c_4 = 0.$$

این سیستم همگن است و بنابراین حل دارد و چهار مجهول دارد ولی تنها سه معادله، بنابراین پاسخ های غیربدیهی یا non-trivial دارد. (این استدلال برای هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}^3$ با چهار یا بیشتر بردارها صدق می کند.)

(ب) در اینجا کافیت فقط حالت دو برداری را بررسی کنیم. فرض کنید $x_1, \dots, z_2$ را داریم:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\}$$

پس اگر بنویسیم تا ببینیم کدام بردارها در اسپن

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

S هستند، معادله:

$$c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

را می نویسیم و سپس سیستم حاصل را کاهش می دهیم

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 = x$$

$$y_1 c_1 + y_2 c_2 = y$$

$$z_1 c_1 + z_2 c_2 = z$$

در اینجا دو متغیر c_1 و c_2 داریم اما سه معادله، بنابراین وقتی روش گوس به پایان می رسد، در ردیف پایین رابطه ای به شکل

$$m_1 x + m_2 y + m_3 z = 0$$

خواهیم داشت. بنابراین، بردارهای موجود در اسپن مجموعه دو عنصری S باید برخی قیدها را رعایت کنند. از این رو، اسپن نمی تواند تمام $\mathbb{R}^3$ را شامل شود و ناچار است از عواملی که از قیود نهایی ما سرپیچی میکنند صرف نظر کند، بدینها این موضوع به وکتورهای کمتر از سه قابل تعمیم است.

پاسخ ۲ با توجه به اینکه

$$x^\vee = ((x+t) - t)^\vee = (x+t)^\vee - \vee t(x+t) + t^\vee \quad \text{و} \quad x = x+t-t,$$

داریم:

$$f(x) = c_\vee(x+t)^\vee + (c_\wedge - \vee t c_\vee)(x+t) + (c_\bullet - t c_\wedge + t^\vee c_\vee).$$

بنابراین، B فضای V را اسپن می‌کند و در نتیجه B یک پایه است. مختصات f نسبت به پایه B به ترتیب عبارتند از:

$$(c_\vee, c_\wedge - \vee t c_\vee, c_\bullet - t c_\wedge + t^\vee c_\vee).$$

پاسخ ۳ (الف) نشان دادن این که هیچ بردار ناصفر $w \in X$ در رابطه $Aw = \bullet$ برقرار نیست

تفکیک بردارها در $\mathbb{R}^n$: هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ را می‌توان به صورت یکتایی به شکل $x = v + w$ نوشت، به طوری که:

$$\bullet \quad v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\} \quad (\text{فضای نال ماتریس } A)$$

$$\bullet \quad w \in X = \text{span}\{w_1, \dots, w_{n-k}\}$$

فرض $w \in X$ و $Aw = \bullet$: فرض کنید برای برداری $w \in X$ داشته باشیم $Aw = \bullet$. طبق تعریف، هر برداری که توسط A به بردار صفر نگاشت می‌شود، در فضای نال A قرار دارد. بنابراین، w هم در X و هم در $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ قرار دارد.

استفاده از خاصیت جمع مستقیم: از آنجا که $\mathbb{R}^n$ جمع مستقیم $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ و X است، تنها بردار مشترک میان این دو زیرفضا بردار صفر است. در نتیجه، $w = \bullet$ خواهد بود.

(ب) اثبات این که $\{Aw_1, \dots, Aw_{n-k}\}$ یک پایه برای فضای ستونی A است

نشان دادن استقلال خطی: فرض کنید ضرایب $c_1, c_2, \dots, c_{n-k}$ وجود دارند به طوری که:

$$c_1(Aw_1) + c_2(Aw_2) + \dots + c_{n-k}(Aw_{n-k}) = \bullet$$

با استفاده از خاصیت توزیع پذیری ضرب ماتریسی، می‌توان نوشت:

$$A(c_1w_1 + c_2w_2 + \dots + c_{n-k}w_{n-k}) = \bullet$$

اگر $w = c_1w_1 + c_2w_2 + \dots + c_{n-k}w_{n-k}$ باشد، آنگاه $w \in X$ است و $Aw = \bullet$. طبق بخش (الف)، نتیجه می‌گیریم که $w = \bullet$ است. از آنجا که $\{w_1, \dots, w_{n-k}\}$ یک پایه برای X است، تمام ضرایب $c_1, c_2, \dots, c_{n-k}$ باید صفر باشند. بنابراین، مجموعه $\{Aw_1, \dots, Aw_{n-k}\}$ مستقل خطی است.

نشان دادن پوشش دهی: (Spanning) یک بردار دلخواه y را در فضای ستونی A در نظر بگیرید. طبق تعریف، برداری $x \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که $y = Ax$. بردار x را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$x = \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_kv_k + \beta_1w_1 + \dots + \beta_{n-k}w_{n-k}$$

در نتیجه:

$$Ax = \alpha_1Av_1 + \dots + \alpha_kAv_k + \beta_1Aw_1 + \dots + \beta_{n-k}Aw_{n-k}$$

از آنجا که هر v_i در فضای نال A قرار دارد، داریم $Av_i = \bullet$ برای تمام i . بنابراین:

$$Ax = \beta_1Aw_1 + \dots + \beta_{n-k}Aw_{n-k}$$

این نشان می‌دهد که y ترکیبی خطی از بردارهای $Aw_1, \dots, Aw_{n-k}$ است. به عبارت دیگر، این بردارها فضای ستونی A را پوشش می‌دهند.

نتیجه‌گیری: از آنجا که مجموعه $\{Aw_1, \dots, Aw_{n-k}\}$ هم مستقل خطی است و هم فضای ستونی A را پوشش می‌دهد، این مجموعه یک پایه برای فضای ستونی A تشکیل می‌دهد. در نتیجه:

$$\dim(\text{col}(A)) = n - k$$

پاسخ ۴ می‌خواهیم اثبات کنیم:

• اگر k فرد باشد، مجموعه $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_k + v_1\}$ مستقل خطی است.

• اگر k زوج باشد، مجموعه $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_k + v_1\}$ وابسته خطی است.

بخش اول: k فرد است

فرض کنید k عددی فرد باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که مجموعه $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_k + v_1\}$ مستقل خطی است. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$c_1(v_1 + v_2) + c_2(v_2 + v_3) + \dots + c_k(v_k + v_1) = 0$$

که در آن $c_1, c_2, \dots, c_k$ اسکالر هستند. هدف ما این است که نشان دهیم:

$$c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$$

معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$(c_1 + c_k)v_1 + (c_1 + c_2)v_2 + (c_2 + c_3)v_3 + \dots + (c_{k-1} + c_k)v_k = 0$$

از آنجا که مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ مستقل خطی است، ضرایب هر بردار باید صفر باشد. بنابراین، سیستم معادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} c_1 + c_k = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ \vdots \\ c_{k-1} + c_k = 0 \end{cases}$$

از معادله اول داریم $c_k = -c_1$. جایگذاری در معادله دوم می‌دهد $c_2 = -c_1$. ادامه این روند نتایج زیر را به همراه دارد:

$$c_3 = -c_2 = c_1, \quad c_4 = -c_3 = -c_1, \quad \dots, \quad c_k = (-1)^{k-1}c_1$$

چون k فرد است، داریم $(-1)^{k-1} = 1$ ، پس $c_k = c_1$. اما از معادله اول می‌دانیم $c_k = -c_1$. بنابراین:

$$c_1 = -c_1 \implies c_1 = 0$$

با جایگذاری $c_1 = 0$ در سیستم معادلات، نتیجه می‌گیریم:

$$c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad \dots, \quad c_k = 0$$

پس مجموعه $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_k + v_1\}$ در حالتی که k فرد باشد، مستقل خطی است.

بخش دوم: k زوج است

فرض کنید k عددی زوج باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که مجموعه $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_k + v_1\}$ وابسته خطی است. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$c_1(v_1 + v_2) + c_2(v_2 + v_3) + \dots + c_k(v_k + v_1) = 0$$

مانند بخش اول، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$(c_1 + c_k)v_1 + (c_1 + c_2)v_2 + (c_2 + c_3)v_3 + \dots + (c_{k-1} + c_k)v_k = 0$$

با توجه به استقلال خطی $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ، سیستم معادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} c_1 + c_k = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ \vdots \\ c_{k-1} + c_k = 0 \end{cases}$$

دوباره از معادله اول داریم $c_k = -c_1$. سپس $c_2 = -c_1$ و این روند ادامه می‌یابد:

$$c_3 = c_1, \quad c_4 = -c_1, \quad \dots, \quad c_k = (-1)^{k-1}c_1$$

چون k زوج است، $(-1)^{k-1} = -1$ ، پس $c_k = -c_1$. از معادله اول نیز $c_k = -c_1$ ، که سیستم را سازگار می‌سازد. می‌توانیم $c_1 = 1$ را انتخاب کنیم. در این حالت:

$$c_2 = -1, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = -1, \quad \dots, \quad c_k = -1$$

این ترکیب خطی غیربدیهی داریم:

$$1(v_1 + v_2) - 1(v_2 + v_3) + 1(v_3 + v_4) - \dots - 1(v_k + v_1) = 0$$

بنابراین، مجموعه $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_k + v_1\}$ در حالتی که k زوج باشد، وابسته خطی است.

پاسخ ۵ در ابتدا می توانیم بنویسیم :

$$U = AV$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix}$$

حال پس می توانیم برای بررسی وابسته و یا مستقل خطی بودن بردارهای $u_1, \dots, u_n$ رابطه زیر را بنویسیم:

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i = 0.$$

و می توان آن را به این صورت بازنویسی کنیم:

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^m a_{ij} v_j = 0.$$

با تغییر ترتیب جمع ها، می توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i a_{ij} v_j = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^m v_j \sum_{i=1}^n c_i a_{ij} = 0$$

پس برای هر $1 \leq j \leq m$ ، داریم:

$$\sum_{i=1}^n c_i a_{ij} = 0.$$

پس نتیجه می گیریم که m معادله و n مجهول داریم و چون تعداد مجهول ها از تعداد معادلات بیشتر است حتما جواب نابدیهی برای آن وجود دارد بنابراین این بردارها وابسته خطی هستند.

پاسخ ۶ گزاره داده شده را اثبات می کنیم.

ستون i ام ماتریس های A, X, B را به ترتیب با A_i, X_i, B_i نشان می دهیم.

فرض می کنیم X ای موجود باشد به طوری که $AX = B$. ستون i ام از ضرب A در ستون i ام X حاصل می شود. یعنی:

$$AX_i = B_i$$

از طرفی AX_i یک ترکیب خطی از ستون های A است (با ضرایب موجود در X_i). پس هر ستون ماتریس B یک ترکیب خطی از ستون های A است. بنابراین اگر ماتریس B را به ماتریس A بچسبانیم (ماتریس افزوده) و فضای ستونی ماتریس حاصل را در نظر بگیریم، با فضای ستونی ماتریس A تفاوتی ندارد. یعنی:

$$Im(A) = Im(A:B) \Rightarrow Dim(Im(A)) = Dim(Im(A:B)) \Rightarrow Rank(A) = Rank(A:B)$$

حال فرض می کنیم $Rank(A) = Rank(A:B) = r$. پایه ای مانند $u_1, u_2, \dots, u_r$ برای فضای ستونی ماتریس A در نظر می گیریم.

اثبات می کنیم هر B_i را می توان به صورت ترکیب خطی ای از $u_1, u_2, \dots, u_r$ نوشت.

از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض می کنیم این طور نباشد. در این صورت $u_1, u_2, \dots, u_r, B_i$ مستقل خطی اند. یعنی:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_r u_r + \alpha B_i = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_r = \alpha = 0$$

زیرا اگر $\alpha \neq 0$ ، می توان B_i را برحسب $u_1, u_2, \dots, u_r$ نوشت که خلاف فرض خلف است. با جایگذاری $\alpha = 0$ در عبارت (پاسخ ۶) به معادله

$$\sum_{i=1}^r c_i u_i = 0 \text{ می رسیم. چون } u_1, u_2, \dots, u_r \text{ یک پایه تشکیل می دهند، مستقل خطی هستند و } c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0. \text{ بنابراین } c_1 = c_2 = \dots = c_r = \alpha = 0.$$

حال اگر بردارهای $u_1, u_2, \dots, u_r, B_i$ مستقل خطی باشند، می توان نتیجه گرفت که $Rank(A:B) \geq Rank(A) + 1$ که تناقض است. پس ثابت می شود که هر B_i را می توان به صورت ترکیب خطی ای از $u_1, u_2, \dots, u_r$ نوشت. چون $u_1, u_2, \dots, u_r$ یک پایه برای فضای ستونی A است، هر B_i را می توان به صورت ترکیب خطی ای از $A_1, A_2, \dots, A_n$ نوشت.

فرض می کنیم $B_i = c_{i1} A_1 + c_{i2} A_2 + \dots + c_{in} A_n$. در این صورت ماتریس X که ستون i ام آن به صورت

$$\begin{bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{bmatrix}$$

تعریف می شود، در رابطه

$$AX = B \text{ صدق می کند.}$$

پاسخ ۷ می توانیم رابطه صریح زیر را بیان کنیم:

$$f_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{t - r_j}{r_i - r_j}$$

همانطور که مشخص است این تابع در همه نقاط $r_1, \dots, r_n$ برابر صفر می شود و در نقطه r_i برابر با یک می شود. حال می خواهیم پایه بودن آن برای V را اثبات کنیم. برای بررسی پایه بودن مجموعه توابع $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ باید دو ویژگی استقلال خطی و پوشاینده بودن بررسی شوند.

۱. استقلال خطی:

فرض کنیم ترکیب خطی زیر برابر صفر باشد:

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0.$$

با جایگذاری $t = r_i$ برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم:

$$c_1 f_1(r_i) + c_2 f_2(r_i) + \dots + c_n f_n(r_i) = 0.$$

از آنجایی که $f_i(r_j) = \delta_{ij}$ (یعنی $f_i(r_j) = 1$ اگر $i = j$ و صفر در غیر این صورت)، به دست می آوریم:

$$c_i = 0 \quad \forall i \in 1 \leq i \leq n$$

پس مجموعه $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ مستقل خطی است.

۲. پوشاینده بودن: باید نشان دهیم که هر چند جمله ای دلخواه $\rho(t)$ در فضای V را می توان به صورت ترکیب خطی توابع f_i نوشت. به عبارت دیگر، برای ضرایب مناسب $a_1, a_2, \dots, a_n$ داریم:

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^n p(r_i) f_i(t).$$

با جایگذاری $t = r_j$ داریم:

$$\rho(r_j) = \sum_{i=1}^n p(r_i) f_i(r_j).$$

چون $f_i(r_j) = \delta_{ij}$ ، نتیجه می گیریم:

$$\rho(r_j) = p(r_j),$$

از آنجایی که $\rho(t) = \sum_{i=1}^n p(r_i) f_i(t)$ و ترکیب خطی در n نقطه متمایز برابر هستند و هر دو چند جمله ای هایی با درجه کمتر از n هستند پس می توان گفت این دو چند جمله ای با هم برابر هستند پس نتیجه می گیریم هر $t \in V$ را می توان به صورت ترکیب خطی از $f_1, f_2, \dots, f_n$ نوشت.

پس نتیجه می گیریم که $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ می توانند یک پایه را برای V تشکیل دهند.

پاسخ ۸ ۱. نشان دهید که $\text{null}(A) \subseteq \text{null}(A^T A)$:

• فرض کنید x یک بردار دلخواه باشد که $Ax = 0$ (یعنی $x \in \text{null}(A)$).

• بنابراین، $A^T Ax = A^T(0) = 0$.

• بنابراین، $x \in \text{null}(A^T A)$ ، این نشان می دهد که: $\text{null}(A) \subseteq \text{null}(A^T A)$.

۲. نشان دهید که $\text{null}(A^T A) \subseteq \text{null}(A)$:

• فرض کنید x یک بردار دلخواه باشد که $A^T Ax = 0$ (یعنی $x \in \text{null}(A^T A)$).

• معادله $A^T Ax = 0$ را از سمت چپ با x^T ضرب می کنیم تا به $x^T A^T Ax = 0$ برسیم.

• توجه کنید که $x^T A^T Ax = (Ax)^T (Ax) = \sum_{i=1}^m ((Ax)_i)^2$.

• از آنجا که هر جمله $((Ax)_i)^2$ مربعی از یک عدد حقیقی است (و بنابراین غیر منفی)، تنها راهی که مجموع آنها می تواند صفر باشد این است که هر جمله برابر صفر شود. به عبارت دیگر، برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ ، $(Ax)_i = 0$.

• این به این معنی است که $Ax = 0$ ، یعنی $x \in \text{null}(A)$ ، که اثبات می کند: $\text{null}(A^T A) \subseteq \text{null}(A)$.

نتیجه گیری

از آنجا که نشان داده ایم که $\text{null}(A) \subseteq \text{null}(A^T A)$ و $\text{null}(A^T A) \subseteq \text{null}(A)$ ، نتیجه می گیریم که:

$$\text{null}(A^T A) = \text{null}(A)$$

این اثبات کامل شد.

پاسخ ۹ از آنجا که $\text{rank}(A) = r$ است، بعد فضای ستونی A برابر r می باشد. بنابراین، ستون های A را می توان به صورت ترکیبات خطی از r ستون مستقل خطی نوشت.

حال r ستون مستقل خطی از A انتخاب کنید. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید اولین r ستون از A باشند. ماتریس C را نیز با ابعاد $r \times n$ به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$C = [I_r \quad 0]$$

که در آن I_r ماتریس همانی $r \times r$ هست.

فرض کنید B ماتریس $n \times r$ متشکل از r ستون انتخاب شده A باشد:

$$B = AC^T$$

داریم:

$$A = AI_n = A \begin{bmatrix} C^T \\ 0 \end{bmatrix} = (AC^T)C = BC$$

در نتیجه دو ماتریس B و C پیدا شدند و اثبات کامل می شود.

پاسخ ۱۰ رتبه $A^\vee$ با رتبه A و بعد اشتراک فضای ستونی A با فضای تهی A ^۵ مرتبط است. به طور خاص داریم:

$$\text{rank}(A^\vee) = \text{rank}(A) - \dim(\text{col}(A) \cap \text{null}(A)),$$

که در آن:

- $\text{col}(A)$: فضای ستونی A ,
- $\text{null}(A)$: فضای تهی A ,
- $\dim(\text{col}(A) \cap \text{null}(A))$: بعد اشتراک فضای ستونی و فضای تهی A

است.

از قضیه $\text{rank} - \text{nullity}$ می دانیم:

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n.$$

و با توجه به $\text{rank}(A) = r$:

$$\text{nullity}(A) = n - r.$$

از طرفی اشتراک $\text{col}(A) \cap \text{null}(A)$ شامل بردارهایی است که هم در فضای ستونی A و هم در فضای تهی A قرار دارند. بعد این اشتراک حداکثر برابر است با:

$$\min(\text{rank}(A), \text{nullity}(A)).$$

با توجه به $\text{rank}(A) = r$ و $\text{nullity}(A) = n - r$ داریم:

$$\dim(\text{col}(A) \cap \text{null}(A)) \leq \min(r, n - r).$$

بنابراین:

$$\dim(\text{col}(A) \cap \text{null}(A)) \leq n - r.$$

در نهایت، با استفاده از رابطه:

$$\text{rank}(A^\vee) = \text{rank}(A) - \dim(\text{col}(A) \cap \text{null}(A)),$$

و جایگذاری $\text{rank}(A) = r$ و $\dim(\text{col}(A) \cap \text{null}(A)) \leq n - r$ ، به دست می آوریم:

$$\text{rank}(A^\vee) \geq r - (n - r).$$

$$\text{rank}(A^\vee) \geq 2r - n.$$

و حکم ثابت می شود.