

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۴



تاریخ انتشار: ۲۷ فروردین ۱۴۰۴

تمرین سوم

نرم، گرام اشمیت، نامساوی ها

۱. پرسش های خود درباره این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

سوالات تئوری ()

پرسش ۱ (۰ نمره)

فرض کنید $T \in \mathcal{L}(V)$ طوری که برای هر $v \in V$ ، رابطه $\|Tv\| \leq \|v\|$ برقرار است. ثابت کنید که $T - \sqrt{2}I$ یک تابع یک به یک^۱ است.

پرسش ۲ (۰ نمره)

الف. نشان دهید تابعی که یک زوج مرتب $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ از عناصر $\mathbb{R}^2$ را به مقدار $|x_1 y_1| + |x_2 y_2|$ می برد، یک ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^2$ نیست.

ب. نشان دهید که تابعی که یک زوج مرتب $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$ از عناصر $\mathbb{R}^3$ را به مقدار $x_1 y_1 + x_3 y_3$ می برد، یک ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^3$ نیست.

پرسش ۳ (۰ نمره)

ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -5 & -3 \\ 3 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

و بردار

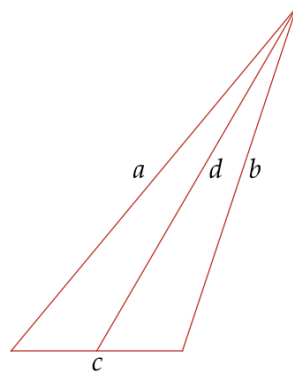
$$x = \begin{bmatrix} 20 \\ -16 \\ 14 \end{bmatrix}$$

داده شده اند. بردار x را به صورت مجموع یک بردار در فضای سطری A و یک بردار در فضای پوچ^۲ A بیان کنید.

پرسش ۴ (۰ نمره)

در یک مثلث با اضلاع به طول های a ، b و c ، فرض کنید d طول پاره خطی باشد که از وسط ضلع به طول c به رأس مقابل آن کشیده شده است. نشان دهید که:

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4}c^2 + 4d^2$$



پرسش ۵ (۰ نمره) فرض کنید $e_1, \dots, e_n$ یک پایه یکه متعامد از فضای ضرب داخلی V باشد.

injective^۱
nullspace^۲

(الف) ثابت کنید که اگر $v_1, \dots, v_n$ بردارهایی در V باشند به طوری که:

$$\|e_k - v_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

برای هر k ، آنگاه $v_1, \dots, v_n$ یک پایه از V خواهد بود.

(ب) نشان دهید که بردارهایی $v_1, \dots, v_n$ در V وجود دارند به طوری که:

$$\|e_k - v_k\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

برای هر k ، اما $v_1, \dots, v_n$ خطی مستقل نیستند.

پرسش ۶ (۰ نمره) زاویه بین دو بردار (که به صورت پیکان‌هایی با نقطه ابتدایی در مبدأ در نظر گرفته می‌شوند) در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ به صورت هندسی قابل تعریف است. با این حال، در فضای $\mathbb{R}^n$ برای $n > 3$ هندسه چندان واضح نیست. بنابراین زاویه بین دو بردار ناصفر $x, y \in \mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\arccos \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right),$$

توضیح دهید که چرا نامساوی کوشی-شوارتز برای نشان دادن اینکه این تعریف معنادار است، لازم است.

پرسش ۷ (۰ نمره) فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی‌البعد روی $\mathbb{C}$ باشد. برای هر $u, v \in V$ نشان دهید

$$\langle u | v \rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4} + \frac{\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2}{4}.$$

پرسش ۸ (۰ نمره) فرض کنید $M_n(\mathbb{R})$ فضای ماتریس‌های مربعی از مرتبه n روی $\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید که تابع زیر یک ضرب داخلی روی $M_n(\mathbb{R})$ تعریف می‌کند:

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^T B)$$

همچنین نشان دهید برای یک جفت ماتریس A و B در $M_n(\mathbb{R})$

$$\text{tr}(A^T B) \leq \sqrt{\text{tr}(A^T A)} \sqrt{\text{tr}(B^T B)}.$$

پرسش ۹ (۰ نمره) ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots \\ 1 & \vdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. تجزیه QR ماتریس A را با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت بدست آورید.