

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۴



تاریخ انتشار: ۲۶ فروردین ۱۴۰۳

تمرین سوم

نرم، گرام اشمیت، نامساوی ها

۱. پرسش های خود درباره این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

سوالات تئوری ()

پرسش ۱ (۰ نمره)

فرض کنید $T \in \mathcal{L}(V)$ طوری که برای هر $v \in V$ ، رابطه $\|Tv\| \leq \|v\|$ برقرار است. ثابت کنید که $T - \sqrt{2}I$ یک تابع یک به یک^۱ است.

پرسش ۲ (۰ نمره)

الف. نشان دهید تابعی که یک زوج مرتب $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ از عناصر $\mathbb{R}^2$ را به مقدار $|x_1 y_1| + |x_2 y_2|$ می برد، یک ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^2$ نیست.

ب. نشان دهید که تابعی که یک زوج مرتب $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$ از عناصر $\mathbb{R}^3$ را به مقدار $x_1 y_1 + x_3 y_3$ می برد، یک ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^3$ نیست.

پرسش ۳ (۰ نمره)

ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -5 & -3 \\ 3 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

و بردار

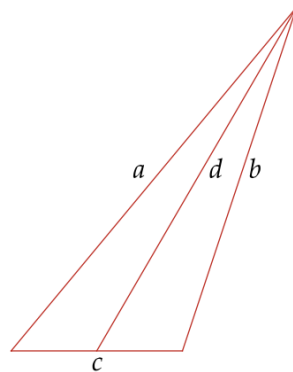
$$x = \begin{bmatrix} 20 \\ -16 \\ 14 \end{bmatrix}$$

داده شده اند. بردار x را به صورت مجموع یک بردار در فضای سطری A و یک بردار در فضای پوچ^۲ A بیان کنید.

پرسش ۴ (۰ نمره)

در یک مثلث با اضلاع به طول های a ، b و c ، فرض کنید d طول پاره خطی باشد که از وسط ضلع به طول c به رأس مقابل آن کشیده شده است. نشان دهید که:

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4}c^2 + 4d^2$$



پرسش ۵ (۰ نمره) فرض کنید $e_1, \dots, e_n$ یک پایه یکه متعامد از فضای ضرب داخلی V باشد.

injective^۱
nullspace^۲

(الف) ثابت کنید که اگر $v_1, \dots, v_n$ بردارهایی در V باشند به طوری که:

$$\|e_k - v_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

برای هر k ، آنگاه $v_1, \dots, v_n$ یک پایه از V خواهد بود.

(ب) نشان دهید که بردارهایی $v_1, \dots, v_n$ در V وجود دارند به طوری که:

$$\|e_k - v_k\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

برای هر k ، اما $v_1, \dots, v_n$ خطی مستقل نیستند.

پرسش ۶ (۰ نمره) زاویه بین دو بردار (که به صورت پیکان‌هایی با نقطه ابتدایی در مبدأ در نظر گرفته می‌شوند) در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ به صورت هندسی قابل تعریف است. با این حال، در فضای $\mathbb{R}^n$ برای $n > 3$ هندسه چندان واضح نیست. بنابراین زاویه بین دو بردار ناصفر $x, y \in \mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}\right),$$

توضیح دهید که چرا نامساوی کوشی-شوارتز برای نشان دادن اینکه این تعریف معنادار است، لازم است.

پرسش ۷ (۰ نمره) فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی متناهی‌البعد روی $\mathbb{C}$ باشد. برای هر $u, v \in V$ نشان دهید

$$\langle u|v \rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4} + \frac{\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2}{4}.$$

پرسش ۸ (۰ نمره) فرض کنید $M_n(\mathbb{R})$ فضای ماتریس‌های مربعی از مرتبه n روی $\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید که تابع زیر یک ضرب داخلی روی $M_n(\mathbb{R})$ تعریف می‌کند:

$$\langle A|B \rangle = \text{tr}(A^T B)$$

همچنین نشان دهید برای یک جفت ماتریس A و B در $M_n(\mathbb{R})$

$$\text{tr}(A^T B) \leq \sqrt{\text{tr}(A^T A)} \sqrt{\text{tr}(B^T B)}.$$

پرسش ۹ (۰ نمره) ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. تجزیه QR ماتریس A را با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت بدست آورید.

پاسخ ۱ (۰ نمره)

شرط داده‌شده:

$$\forall v \in V \quad \|Tv\| \leq \|v\|$$

باید نشان دهیم که $T - \sqrt{2}I$ یک تابع یک‌به‌یک است. فرض کنیم:

$$(T - \sqrt{2}I)v = 0$$

یعنی:

$$Tv = \sqrt{2}v.$$

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\|Tv\| \leq \|v\|.$$

حال اگر $Tv = \sqrt{2}v$ باشد، از این رابطه نتیجه می‌گیریم:

$$\|\sqrt{2}v\| = \sqrt{2}\|v\| \leq \|v\|.$$

با تقسیم بر $\|v\|$ (اگر $v \neq 0$ باشد)، داریم:

$$\sqrt{2} \leq 1,$$

که تناقض است. بنابراین باید $v = 0$ باشد. پس $T - \sqrt{2}I$ یک تابع یک‌به‌یک است.

پاسخ ۲ (۰ نمره)

الف. تابع داده‌شده:

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = |x_1 y_1| + |x_2 y_2|$$

باید بررسی کنیم که آیا این تابع یک ضرب داخلی است یا نه.

- تقارن^۳ برقرار است زیرا $|x_1 y_1| + |x_2 y_2| = |y_1 x_1| + |y_2 x_2|$.
- اما خاصیت مثبت معین^۴ بودن نقض می شود زیرا برای مثال داریم:

$$\langle (1, -1), (1, 1) \rangle = |1 \cdot 1| + |-1 \cdot 1| = 2$$

در حالی که انتظار داریم مقدار صفر شود اگر بردارها عمود باشند. پس این تابع یک ضرب داخلی نیست.

ب. تابع داده شده:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

این تابع تقارن دارد، اما خاصیت مثبت معین بودن را بررسی می کنیم. اگر $x_1 = 0$ و $x_3 = 0$ باشد، آنگاه:

$$\langle (0, x_2, 0), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 0$$

پس بردارهایی مانند $(0, 1, 0)$ مقدار صفر می دهند، اما خودشان صفر نیستند. بنابراین این تابع یک ضرب داخلی نیست.

پاسخ ۳ (۰ نمره)

باید بردارهای $x_n \in \text{nullspace}(A)$ و $x_r \in \text{rowspace}(A)$ را بیابیم به طوری که $x = x_n + x_r$.

فرم رده پلکانی کاهش یافته ی A به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از آنجا که $\text{nullspace}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ تک بعدی است، به $\text{nullspace}(A)$ تصویر می کنیم. مشخص است که

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یک پایه ی متعامد برای $\text{nullspace}(A)$ است. بنابراین، می توانیم از روابط تصویریابی^۵ که در اسلایدهای درسی آورده شده اند استفاده کنیم تا تصویر x را روی $\text{nullspace}(A)$ بیابیم:

$$x_n = \left(\frac{\begin{bmatrix} 20 \\ -16 \\ 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}} \right) \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که مقدار آن برابر است با:

$$\frac{107}{111} \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سپس، x_r برابر باقی مانده است:

$$x_r = x - x_n = \begin{bmatrix} 20 \\ -16 \\ 14 \end{bmatrix} - \frac{107}{111} \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که معادل است با:

$$\frac{1}{111} \begin{bmatrix} 722 \\ -2311 \\ 1447 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۴ (۰ نمره)

فرض کنیم نقاط مثلث به صورت برداری با $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ مشخص شده باشند. همچنین M را به عنوان وسط ضلع BC در نظر می گیریم، بنابراین:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2}$$

و طول میانه d به صورت زیر تعریف می شود:

$$d^2 = \|\vec{A} - \vec{M}\|^2$$

symmetric^۳
positive-definite^۴
projection^۵

چون M وسط ضلع BC است، می‌توان نوشت:

$$\vec{A} - \vec{M} = \vec{A} - \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} = \frac{2\vec{A} - \vec{B} - \vec{C}}{2}$$

با استفاده از خاصیت ضرب داخلی، داریم:

$$\|\vec{A} - \vec{M}\|^2 = \left(\frac{2\vec{A} - \vec{B} - \vec{C}}{2} \right) \cdot \left(\frac{2\vec{A} - \vec{B} - \vec{C}}{2} \right)$$

که با بسط عبارت ضرب داخلی به‌دست می‌آید:

$$\|\vec{A} - \vec{M}\|^2 = \frac{1}{4} \left((2\vec{A} - \vec{B} - \vec{C}) \cdot (2\vec{A} - \vec{B} - \vec{C}) \right)$$

با گسترش این ضرب داخلی:

$$(2\vec{A} - \vec{B} - \vec{C}) \cdot (2\vec{A} - \vec{B} - \vec{C}) = 4\|\vec{A}\|^2 - 4\vec{A} \cdot \vec{B} - 4\vec{A} \cdot \vec{C} + \|\vec{B}\|^2 + 2\vec{B} \cdot \vec{C} + \|\vec{C}\|^2$$

با تقسیم بر ۴:

$$\|\vec{A} - \vec{M}\|^2 = \frac{1}{4} (4\|\vec{A}\|^2 - 4\vec{A} \cdot \vec{B} - 4\vec{A} \cdot \vec{C} + \|\vec{B}\|^2 + 2\vec{B} \cdot \vec{C} + \|\vec{C}\|^2)$$

اکنون مقادیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$a^2 = \|\vec{A} - \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$b^2 = \|\vec{A} - \vec{C}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{C}\|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$c^2 = \|\vec{B} - \vec{C}\|^2 = \|\vec{B}\|^2 + \|\vec{C}\|^2 - 2\vec{B} \cdot \vec{C}$$

حال با جمع دو رابطه:

$$a^2 + b^2 = 2\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 + \|\vec{C}\|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} - 2\vec{A} \cdot \vec{C}$$

و از رابطه‌ی d^2 استفاده می‌کنیم:

$$d^2 = \frac{1}{4} (4\|\vec{A}\|^2 - 4\vec{A} \cdot \vec{B} - 4\vec{A} \cdot \vec{C} + \|\vec{B}\|^2 + 2\vec{B} \cdot \vec{C} + \|\vec{C}\|^2)$$

با جایگذاری و ساده‌سازی، نتیجه می‌گیریم:

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4} c^2 + 2d^2$$

که همان اتحاد آپولونیوس است.

پاسخ ۵ (۰ نمره)

پاسخ بخش (الف):

ما ثابت می‌کنیم که اگر هر v_k نسبت به e_k به اندازه‌ای کوچک (کمتر از $\frac{1}{\sqrt{n}}$) تغییر داده شود، آنگاه تغییرات جمعی آنچنان زیاد نخواهد شد که استقلال خطی از بین برود. یکی از راه‌های اثبات این نتیجه استفاده از استدلال «تناقض» و استفاده از برآورد نابرابری مثل Cauchy–Schwarz است.

گام ۱

فرض کنید بردارهای $v_1, \dots, v_n$ مطابق شرط داده شده باشند. برای هر k می‌نویسیم

$$v_k = e_k + u_k$$

به‌طوری‌که

$$\|u_k\| = \|v_k - e_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

گام ۲

فرض کنید ضرایب مختلط (یا حقیقی) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وجود داشته باشند به طوری که

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

نشان می‌دهیم که تمام α_k باید صفر باشند.

با جایگذاری رابطه بالا داریم:

$$\alpha_1(e_1 + u_1) + \dots + \alpha_n(e_n + u_n) = (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) + (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = 0.$$

از آنجایی که $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه متعامد است، تجزیه یکتای بردار در آن پایه داریم؛ بنابراین

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = -(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n).$$

حال نرم دو طرف را محاسبه می‌کنیم. از آنجایی که بردارهای e_k متعامد و هم‌نرمال هستند، داریم:

$$\|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2. \quad (۱)$$

گام ۳

با استفاده از نامساوی مثلث و نامساوی Cauchy–Schwarz می‌توانیم برآورد زیر را داشته باشیم. ابتدا توجه کنید:

$$\|\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n\| \leq |\alpha_1| \|u_1\| + \dots + |\alpha_n| \|u_n\|.$$

از شرط داده‌شده هر $\|u_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ بنابراین:

$$\|\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n\| < \frac{1}{\sqrt{n}} (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|).$$

و حالا با نامساوی Cauchy–Schwarz داریم:

$$|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \leq \sqrt{n} \cdot (|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

بنابراین:

$$\|\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n\| < \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} \cdot (|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}} = (|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (۲)$$

گام ۴

از رابطه اولیه داریم:

$$\|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\| = \|\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n\|.$$

بنابراین با استفاده از (۱) و (۲) می‌نویسیم:

$$(|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}} < (|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

این نابرابری تنها در حالت صفر بودن (یعنی $|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = 0$) درست است. پس باید همه $\alpha_k = 0$ باشند.

نتیجه می‌گیریم که $v_1, \dots, v_n$ خطی مستقل بوده و بنابراین یک پایه برای V تشکیل می‌دهند.

پاسخ بخش (ب):

در این قسمت باید بردارهایی را پیدا کنیم که در هر مرحله بیشترین تغییر از e_k بیش از $\frac{1}{\sqrt{n}}$ نشود (حتی می‌تواند مساوی باشد) ولی مجموعه به گونه‌ای ساخته شود که وابستگی خطی داشته باشد. یک ایده موثر استفاده از یک «تغییر یکسان» برای همه بردارهاست.

ایده:

بردار u را در نظر بگیرید به طوری که

$$\|u\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

و سپس برای هر k بردار v_k را به صورت

$$v_k = e_k + u$$

تعریف کنید.

$$e_k - v_k = -u \Rightarrow \|e_k - v_k\| = \|u\| = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

پس شرط $\|e_k - v_k\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ برآورده می‌شود (در واقع به حالت مساوی).

اکنون نشان می‌دهیم که بردارهای v_k خطی وابسته هستند. توجه کنید که:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = (e_1 + e_2 + \dots + e_n) + nu.$$

انتخاب u به گونه‌ای امکان‌پذیر است که این جمع صفر شود. برای مثال، اگر u را به صورت

$$u = -\frac{1}{n}(e_1 + e_2 + \dots + e_n)$$

در نظر بگیریم، آنگاه:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = (e_1 + \dots + e_n) - (e_1 + \dots + e_n) = 0.$$

بنابراین بردارهای v_k وابستگی خطی دارند (زیرا ترکیب کسری آن‌ها صفر شده است در حالی که ضرایب انتخاب شده همه برابر با ۱ هستند و غیر صفرند).

برآورد $\|u\|$:

برای اینکه انتخاب u مجاز باشد، باید $\|u\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ باشد.

با تعریف

$$u = -\frac{1}{n}(e_1 + \dots + e_n),$$

محاسبه می‌کنیم:

$$\|u\| = \frac{1}{n}\|e_1 + \dots + e_n\|.$$

از آنجایی که بردارهای e_k یک‌تعامد هستند، داریم:

$$\|e_1 + \dots + e_n\|^2 = n$$

و بنابراین:

$$\|e_1 + \dots + e_n\| = \sqrt{n}$$

پس:

$$\|u\| = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

بنابراین هم شرط تغییر برقرار است و هم وابستگی خطی برقرار می‌شود.

پاسخ ۶ (نمره)

برای تعریف زاویه بین دو بردار غیرصفر x و y در فضای $\mathbb{R}^n$ ، از فرمول

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right)$$

استفاده می‌کنیم. توجه کنید که تابع $\arccos$ تنها بر روی بازه $[-1, 1]$ تعریف شده است؛ بنابراین لازم است تضمین کنیم که عبارت $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$ همیشه در همین بازه قرار گیرد.

دقیقا همان جا است که نامساوی کوشی-شوارتز وارد عمل می‌شود. این نامساوی بیان می‌کند:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

اگر هر دو طرف این نامساوی را بر $(\|x\| \|y\|)$ (که برای بردارهای غیرصفر مثبت است) تقسیم کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\left| \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right| \leq 1$$

یا به عبارت دیگر:

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1.$$

این نتیجه تضمین می‌کند که مقدار داخل تابع $\arccos$ همواره در دامنه تعریف شده برای تابع $\arccos$ قرار می‌گیرد. بدون استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز، ممکن بود نگرانی وجود داشته باشد که مقدار کسر معادل $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$ از بازه $[-1, 1]$ خارج شده و در نتیجه تعریف زاویه معنایی نداشته باشد.

به طور خلاصه، نامساوی کوشی-شوارتز تضمین می‌کند که نسبت بین ضرب اسکالر و حاصلضرب نُرم‌ها، مقداری بین -1 و 1 است، که این موضوع ضروری است تا تابع $\arccos$ بتواند به درستی زاویه را به عنوان یک عدد حقیقی تعریف کند.

پاسخ ۷ (۰ نمره) ضرب داخلی بردار روی فضای $\mathbb{C}$ به صورت

$$\langle u|v\rangle = u\bar{v}$$

است. همچنین با باز کردن کسر اول سمت راست داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4} &= \frac{(u+v)(\bar{u}+\bar{v}) - (u-v)(\bar{u}-\bar{v})}{4} \\ &= \frac{(u\bar{u} + v\bar{v} + u\bar{v} + v\bar{u}) - (u\bar{u} + v\bar{v} - u\bar{v} - v\bar{u})}{4} = \frac{u\bar{v} + v\bar{u}}{2}\end{aligned}$$

برای کسر دوم نیز به طریق مشابه داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2}{4} &= \frac{(u+iv)(\bar{u}-i\bar{v}) - (u-iv)(\bar{u}+i\bar{v})}{4} \\ &= \frac{(u\bar{u} + v\bar{v} - iu\bar{v} + iv\bar{u}) - (u\bar{u} + v\bar{v} + iu\bar{v} - iv\bar{u})}{4} = \frac{-iu\bar{v} + iv\bar{u}}{2}\end{aligned}$$

پس در نهایت عبارت سمت راست برابر می شود با

$$\frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4} + i \frac{\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2}{4} = \frac{(u\bar{v} + v\bar{u}) + (u\bar{v} - v\bar{u})}{2} = u\bar{v}.$$

که با ضرب داخلی $\langle u|v\rangle$ برابر است.

پاسخ ۸ (۰ نمره)

الف. برای بررسی ضرب داخلی بودن کافی است ۳ شرط آن را چک کنیم:

- تقارن برقرار است چرا که $\text{tr}(B^T A) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(A^T B)$
- نسبت به عملوند اول خطی است چرا که $\langle A + kC|B\rangle = \text{tr}((A^T + kC^T)B) = \text{tr}(A^T B) + \text{tr}(kC^T B) = \langle A|B\rangle + k\langle C|B\rangle$
- مثبت معین است چرا که

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^N (a_i)^T a_i = \sum_{i=1}^N \|a_i\|^2 \geq 0$$

و حالت تساوی تنها زمانی رخ می دهد که تمام a_i ها که ستون های ماتریس A هستند صفر باشند، یعنی $A = 0$.

ب. روش اول:

با توجه به قسمت الف، تابع $\text{tr}(A^T B)$ یک ضرب داخلی روی $M_n(\mathbb{R})$ است. بنابراین در نامساوی کوشی-شوارتز صدق میکند پس

$$\begin{aligned}\langle A|B\rangle &\leq \|A\| \|B\| \\ \implies \text{tr}(A^T B) &\leq \sqrt{\text{tr}(A^T A)} \sqrt{\text{tr}(B^T B)}\end{aligned}$$

روش دوم:

با باز کردن $\text{tr}(A^T B)$ داریم:

$$\text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^N a_i^T b_i = \sum_{i=1}^N \langle a_i, b_i \rangle$$

که طبق نامساوی کوشی-شوارتز روی $\mathbb{R}^d$

$$\sum_{i=1}^N \langle a_i, b_i \rangle \leq \sum_{i=1}^N \|a_i\| \|b_i\|,$$

و طبق نامساوی کوشی-شوارتز روی $\mathbb{R}^N$

$$\sum_{i=1}^N \|a_i\| \|b_i\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N \|a_i\|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N \|b_i\|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} \sqrt{\text{tr}(B^T B)},$$

و حکم اثبات می شود.

پاسخ ۹ (۰ نمره) ستون های ماتریس به ترتیب برابرند با

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

با اعمال فرآیند گرام-اشمیت داریم

$$\tilde{q}_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \|\tilde{q}_1\|^2 = 3$$

$$\tilde{q}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \tilde{q}_1 \rangle}{\|\tilde{q}_1\|^2} \tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \|\tilde{q}_2\|^2 = \frac{4}{3}$$

$$\tilde{q}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \tilde{q}_1 \rangle}{\|\tilde{q}_1\|^2} \tilde{q}_1 - \frac{\langle v_3, \tilde{q}_2 \rangle}{\|\tilde{q}_2\|^2} \tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \|\tilde{q}_3\|^2 = \frac{1}{3}$$

حال، پس از تقسیم هر یک از $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3$ بر نرم آن داریم

$$q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \frac{\tilde{q}_1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \frac{\tilde{q}_2}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \frac{\tilde{q}_3}{\|\tilde{q}_3\|} = \frac{\tilde{q}_3}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

می‌دانیم Q ماتریسی است که ستون‌هایش به ترتیب q_1, q_2, q_3 باشند. بنابراین

$$Q = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} & \sqrt{6} & -2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -\sqrt{6} & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{6} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

و با توجه به اینکه $r_{i,j} = \langle q_i, v_j \rangle$ داریم

$$R = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 3\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 4\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$