

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۳



تاریخ انتشار: ۶ اردیبهشت ۱۴۰۴

تمرین چهارم

نرم، گرام اشمیت، تبدیل خطی

پرسش ۱ (۰ نمره) فرض کنید V و W دو فضای برداری با بعد متناهی هستند و داریم $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$. ثابت کنید:

(آ) $\text{range}(S) \subseteq \text{range}(T)$ اگر و تنها اگر تبدیل خطی $E \in \mathcal{L}(V)$ وجود داشته باشد که $S = TE$.

(ب) $\text{null}(S) \subseteq \text{null}(T)$ اگر و تنها اگر تبدیل خطی $E \in \mathcal{L}(W)$ وجود داشته باشد که $T = ES$.

(ج) حال فرض کنید داشته باشیم $S, T \in \mathcal{L}(V)$ و $\text{range}(S) \subseteq \text{null}(T)$. ثابت کنید $(ST)^2 = 0$ است.

پرسش ۲ (۰ نمره) فرض کنید ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس معکوس پذیر است و همچنین ماتریس $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس پوچ توان با اندیس k است (یعنی $N^k = 0$) که با A جابه جایی پذیر است، یعنی $NA = AN$. معکوس ماتریس $A + N$ را بیابید.

پرسش ۳ (۰ نمره) فرض کنید V فضای برداری با بعد متناهی است و A و B دو تبدیل خطی از V به خودش باشند به طوری که $A^2 = 0$ و $B^2 = 0$ و $AB + BA = I$. عبارات زیر را ثابت کنید.

(آ) اگر N_A و N_B به ترتیب فضاهای نال A و B باشند، آنگاه $N_A = AN_B$ و $N_B = BN_A$.

(ب) بعد V زوج است.

پرسش ۴ (۰ نمره) فرض کنید P_4 فضای چند جمله‌ای‌های با درجه حداکثر ۲ باشد. پایه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\beta = \left\{ x^2 + \frac{3}{4}x - 1, \frac{1}{4}x^2 - x + 2, x - \frac{5}{4} \right\},$$

$$\alpha = \left\{ 2x^2 - x + 4, x^2 + \frac{1}{4}x - 3, \frac{2}{5}x^2 + 3x + 1 \right\}.$$

(آ) ماتریس تغییر پایه $P_{\alpha \rightarrow \beta}$ را بدست آورید.

(ب) فرض کنید چند جمله‌ای $p(x)$ توسط بردار مختصات

$$[p(x)]_{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

نسبت به پایه‌ی α بیان شده است. بردار مختصات $[p(x)]_{\beta}$ را نسبت به پایه‌ی β بدست آورید.

(ج) نشان دهید

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} \cdot [p(x)]_{\alpha} = [p(x)]_{\beta}.$$

(د) حال پایه‌های α و β را مطابق زیر در نظر بگیرید:

$$\alpha = \{x^2, 3x^2 - x, 4x - 2\},$$

$$\beta = \{2x^2 - 1, 3x + 2, x^2 + x + 2\}.$$

چند جمله‌ای $q(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید. بردارهای مختصات این چند جمله‌ای نسبت به هر دو پایه با ضرایب مجهول زیر داده شده است:

$$[q(x)]_{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad [q(x)]_{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

یک رابطه‌ی کلی برای این دو بردار مختصات بدون حل کردن برای یک $q(x)$ مشخص پیدا کنید.

پرسش ۵ (•) (نمره) فضای ضرب داخلی $\mathbb{F}^n$ را در نظر بگیرید، که در آن ضرب داخلی به صورت معمول تعریف می‌شود:

$$\langle x, y \rangle = x^T y, \quad \forall x, y \in \mathbb{F}^n.$$

برای یک تبدیل خطی $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ، می‌توان نشان داد که ضرب داخلی تعریف شد خاصیت زیر را داراست:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^T y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{F}^n,$$

که در آن T^T ترانهاده‌ی T است.

حال این مفهوم را به یک فضای ضرب داخلی دلخواه V تعمیم می‌دهیم. برای یک عملگر خطی $T: V \rightarrow V$ ، عملگر الحاقی هرمیتی T^* که با T^* نمایش داده می‌شود، به عنوان عملگری یکتا تعریف می‌شود که شرط زیر را برقرار می‌کند:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

اکنون فضای ضرب داخلی $C_c^\infty(\mathbb{R})$ را در نظر بگیرید که شامل تمام توابع هموار حقیقی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ است که در $\pm\infty$ صفر می‌شوند (می‌توانید فرض کنید که ضرب داخلی زیر برای تمام زوج‌های توابع در این فضا تعریف شده است). ضرب داخلی در این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx, \quad \forall f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

عملگر مشتق‌گیری $D: C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R})$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده است:

$$Df = \frac{df}{dx}.$$

نشان دهید که D skew-adjoint است، به این معنا که برای آن شرط زیر برقرار است:

$$D^* = -D.$$

پرسش ۶ (•) (نمره) ماتریس‌های $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم: $BC^T B = O_n$ ، $A^{-1}C^{-1} = C^{-1}A^{-1}$. ادعای زیر را ثابت کنید.

$$\det(ABC + CBA + I_n) \geq 0.$$

پرسش ۷ (•) (نمره) فرض کنید که $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس مربعی با رنک یک است. ابتدا اثبات کنید این ماتریس را می‌توان به صورت uv^T که u و v دو بردار n بعدی هستند نوشت. در ادامه عبارت زیر را اثبات کنید.

$$\det(I + M) = 1 + \text{tr}(M)$$

پرسش ۸ (•) (نمره) با فرض $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{C})$ ، ماتریس بلوکی زیر را در نظر بگیرید:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

که در آن M وارون‌پذیر است، A نیز وارون‌پذیر است، و A و C جابه‌جاپذیرند، یعنی $AC = CA$.

(آ) نشان دهید که $AD - CB$ وارون‌پذیر است.

راهنمایی: نشان دهید که

$$\det(M) = \det(AD - CB).$$

(ب) فرض کنید که وارون M به صورت زیر داده شده است:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} X & U \\ Y & V \end{bmatrix},$$

که در آن $X, U, Y, V \in M_n(\mathbb{C})$ هستند. نشان دهید که

$$(AD - CB)^{-1} = VA^{-1}.$$

(آ) ابتدا نشان می‌دهیم اگر $S = TE$ ، آنگاه $\text{range}(S) \subseteq \text{range}(T)$ است. اگر $S = TE$ باشد، آنگاه برای هر $v \in V$ داریم:

$$S(v) = (TE)(v) = T(E(v)).$$

از آنجا که $T(E(v)) \in \text{range}(T)$ ، نتیجه می‌شود که

$$\text{range}(S) \subseteq \text{range}(T).$$

حال باید نشان دهیم اگر $\text{range}(S) \subseteq \text{range}(T)$ باشد، تبدیل خطی $E \in \mathcal{L}(V)$ وجود دارد به طوری که $S = TE$ برقرار شود. ماتریس‌های تبدیل‌های T و S را به ترتیب A و B در نظر می‌گیریم؛ (انتخاب پایه اهمیتی در حل مسئله ندارد). هرگاه $\text{range}(S)$ زیرمجموعه‌ای از $\text{range}(T)$ باشد، آنگاه فضای ستونی ماتریس B زیرفضایی از فضای ستونی ماتریس A است. به عبارت دیگر:

$$\text{range}(S) \subseteq \text{range}(T) \iff \text{Col}(B) \subseteq \text{Col}(A).$$

وقتی فضای ستونی ماتریس A زیرفضایی از فضای ستونی ماتریس B باشد، به این معناست که هر ستون A_i از ماتریس A در فضای ستونی ماتریس B قرار دارد. به عبارت دیگر، می‌توان هر ستون A_i را به صورت ترکیب خطی از ستون‌های ماتریس B نوشت. به صورت ریاضی این موضوع به شکل زیر بیان می‌شود:

$$A_i = B C_i, \quad \forall 1 \leq i \leq \dim(V),$$

که در اینجا C_i برداری است که ضرایب ترکیب خطی ستون‌های ماتریس B را در بر می‌گیرد. در نتیجه، برای هر ستون A_i ، برداری به نام C_i وجود دارد که ضرایب ترکیب خطی ستون‌های ماتریس B را تعیین می‌کند. با تشکیل یک ماتریس از این بردارهای ضرایب، می‌توان ماتریس C را به دست آورد به طوری که:

$$A = BC.$$

این معادله بیان می‌کند که ماتریس C وجود دارد. از آنجا که ماتریس‌های A و B به ترتیب نمایانگر تبدیل‌های خطی S و T هستند، وجود ماتریس C در رابطه $A = BC$ معادل است با وجود تبدیل خطی $E \in \mathcal{L}(V)$ به گونه‌ای که $S = TE$. بنابراین، تبدیل خطی E وجود دارد و حکم اثبات می‌شود.

(ب) ابتدا نشان می‌دهیم اگر $T = ES$ ، آنگاه $\text{null}(S) \subseteq \text{null}(T)$ است. $\text{null}(S)$ شامل تمام بردارهای v از فضای برداری V است که $S(v) = 0$. در نتیجه به ازای هر بردار در فضای پوچ S خواهیم داشت:

$$ES(v) = E(S(v)) = E(0) = T(v) = 0$$

که یعنی به ازای هر $v \in V$ اگر $S(v) = 0$ باشد، $T(v)$ نیز صفر خواهد بود. به عبارت دیگر فضای پوچ S زیر مجموعه فضای پوچ T است.

در گام بعدی نشان می‌دهیم اگر $\text{null}(S) \subseteq \text{null}(T)$ آنگاه E مورد نظر سوال وجود دارد.

فرض کنید ماتریس تبدیل‌های S و T را برحسب پایه‌های مرتب‌شده‌ای برای V و W نوشته‌ایم. (اینکه چه پایه‌ای را انتخاب کنیم اهمیتی در اثبات ندارد) ماتریس A را ماتریس تبدیل T و ماتریس B را ماتریس تبدیل S در پایه‌های مفروض در نظر بگیرید. می‌خواهیم ماتریس C را بیابیم به طوری که:

$$CB = A \quad \text{if} \quad N(B) \subseteq N(A)$$

یافتن C معادل با یافتن E خواهد بود زیرا C همان ماتریس تبدیل E برحسب پایه‌های فرض شده است.

اگر A_i^T را بردار ستون i ام A^T و C_i^T را بردار ستون i ام C^T تعریف کنیم معادله‌ی $CB = A$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$CB = A \iff B^T C^T = A^T \iff B^T C_i^T = A_i^T \quad \forall 0 < i \leq \dim(W).$$

معادله‌ی $B^T C_i^T = A_i^T$ بیان می‌دارد که ستون i ام A^T یک ترکیب خطی از ستون‌های B^T است. از این رو وجود C به طوری که $CB = A$ هم ارز است با این که هر ستون A^T را بتوان برحسب ترکیب خطی از ستون‌های B^T نوشت. به بیان ریاضی نیاز است ثابت کنیم:

$$\text{Col}(A^T) \subseteq \text{Col}(B^T)$$

برای اثبات گزاره‌ی بالا عضو دلخواه $y_1 = A^T w_1$ در فضای سطری A را در نظر بگیرید. تصویر y_1 در فضای سطری B را y_2 می‌نامیم که به شکل $B^T w_2 = y_2$ نوشته می‌شود. با توجه به تعریف تصویر بردار می‌دانیم که $y = y_2 - y_1$ در فضای $\mathbb{R}^{\dim(W)}$ به تمام بردارهای فضای سطری B عمود است و از آنجایی که مولفه‌های By ضرب داخلی y در سطرهای B هستند می‌توان گفت $By = 0$. با توجه به اینکه $N(B)$ زیر مجموعه‌ی $N(A)$ است، نتیجه می‌گیریم Ay برابر با صفر است و y بر فضای سطری A نیز عمود است. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \langle y, y_1 \rangle &= 0, \quad \langle y, y_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle y, y_2 \rangle - \langle y, y_1 \rangle = \langle y, y \rangle = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 \\ &\Rightarrow A^T w_1 = B^T w_2 \end{aligned}$$

در نتیجه $y_1 = y_2$ و هر عضو دلخواه فضای سطری A در فضای سطری B نیز وجود دارد و حکم ثابت می‌شود.

(ج) ابتدا $(ST)^\vee$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(ST)^\vee(v) = (ST)(ST(v)) = (ST)(S(T(v))) = S(T(S(T(v)))).$$

از آنجا که T یک تبدیل خطی بر روی V است، برای هر $v \in V$ داریم $T(v) \in V$ ، بنابراین $S(T(v)) \in \text{range}(S)$. با توجه به فرض، هر بردار در $\text{range}(S)$ در $\text{null}(T)$ قرار دارد به عبارت دیگر:

$$S(T(v)) \in \text{null}(T) \implies T(S(T(v))) = 0.$$

همچنین، از آنجایی که S تبدیل خطی است، داریم:

$$S(0) = 0.$$

بنابراین:

$$S(T(S(T(v)))) = S(0) = 0.$$

در نتیجه، $(ST)^\vee(v) = 0$ برای هر $v \in V$ و حکم ثابت می‌شود.

پاسخ ۲ (۰ نمره) ابتدا با ضرب کردن معکوس ماتریس A از دو طرف، به سادگی به دست می‌آوریم که N و A^{-1} نیز جابه‌جایی‌پذیر هستند، یعنی $A^{-1}N = NA^{-1}$. ادعا می‌کنیم که به ازای هر توانی از N مانند x ، ماتریس‌های A^{-1} و N^x نیز جابه‌جایی‌پذیر هستند. این ادعا به سادگی با استفاده از استقرا قابل اثبات است. فرض کنید به ازای توان x این دو ماتریس جابه‌جایی‌پذیر هستند. به صورت زیر اثبات می‌کنیم که برای $x+1$ نیز جابه‌جایی‌پذیر هستند.

$$A^{-1}N^x = N^x A^{-1} \rightarrow NA^{-1}N^x = N^{x+1}A^{-1} \rightarrow A^{-1}N^{x+1} = N^{x+1}A^{-1}$$

دقت کنید که در گام استقرا از جابه‌جایی‌پذیر بودن N و A^{-1} استفاده کردیم. پایه استقرا نیز همان حالت $x=1$ بود که در ابتدا اثبات شده بود. در ادامه دقت کنید که ماتریس $A+N$ را می‌توانیم به صورت $A(I+A^{-1}N)$ بنویسیم. با توجه به اینکه A معکوس دارد، کافیست معکوس $I+A^{-1}N$ را پیدا کنیم. ابتدا اثبات می‌کنیم که ماتریس $A^{-1}N$ نیز با اندیس k پوچ‌توان است. به عبارت زیر دقت کنید.

$$\begin{aligned} (A^{-1}N)^k &= A^{-1}N \times A^{-1}N \times A^{-1}N \times \dots \times A^{-1}N = A^{-1}N^k \times A^{-1}N \times \dots \times A^{-1}N \\ &= A^{-1}N^k \times A^{-1}N \times \dots \times A^{-1}N = \dots = A^{-1}N^k = A^{-1}N^k \times 0 = 0 \end{aligned}$$

در هر مرحله، از جابه‌جایی‌پذیر بودن N^x و A^{-1} استفاده کردیم. حال که اثبات کردیم ماتریس $A^{-1}N$ پوچ‌توان با اندیس حداکثر k است، نام آن را $X = A^{-1}N$ قرار می‌دهیم و در ادامه، معکوس ماتریس $I+X$ را پیدا می‌کنیم. طبق اتحاد چاق و لاغر، $I - X^k$ را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم.

$$I - X^k = (I + X) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i X^i$$

دقت کنید که با توجه به پوچ‌توان بودن X ، عبارت سمت چپ برابر I می‌شود و بدست می‌آید که ماتریس $\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i X^i$ معکوس راست ماتریس $I+X$ است. با توجه به اینکه ماتریس $I+X$ مربعی می‌باشد، معکوس چپ و راست آن یکسان هستند. در نتیجه، معکوس ماتریس $I+A^{-1}N$ برابر عبارت زیر می‌شود.

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (A^{-1}N)^i$$

در مرحله آخر، به یاد می‌آوریم که هدف ما، بدست آوردن معکوس ماتریس $A+N$ بود که آن را به صورت $A(I+A^{-1}N)$ نوشتیم. معکوس این ماتریس، برابر عبارت $(I+A^{-1}N)^{-1}A^{-1}$ می‌باشد که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت. دقت کنید که در بدست آوردن جواب نهایی، از جابه‌جایی‌پذیر بودن A^{-1} و هر توانی از N استفاده کردیم.

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (A^{-1}N)^i A^{-1} = A^{-1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i A^{-i} N^i$$

پاسخ ۳ (۰ نمره)

(آ) چون $A^\vee = 0, B^\vee = 0$ پس $AV = \ker A, BV = \ker B$ و در نتیجه $AV = \ker A, BV = \ker B$ از طرفی

$$\ker A \subset \{v : BAv = 0 \implies (AB + BA)v = ABv = v\} \subset ABV = A \ker B$$

و در نتیجه ثابت می‌شود که $N_A = N_B$. اثبات حالت دیگر نیز مشابه است.

(ب) پایه $e_1, \dots, e_k$ برای $\ker A$ و پایه $e_{k+1}, \dots, e_n$ برای $\ker B$ را در نظر بگیرید. پایه‌ای برای V می‌باشد زیرا برای هر بردار v داریم

$$v = (AB + BA)v = ABv + BAv = a + b, a = ABv \in \ker A, b = BAv \in \ker B$$

در نتیجه $\dim V = \dim \ker A + \dim \ker B$. مطابق بخش قبل داریم

$$\dim \ker A \geq \dim \ker B$$

زیرا $B \ker A = \ker B$ و $\dim \ker B \geq \dim \ker A$ چون $A \ker B = \ker A$. این نتیجه می‌دهد $\dim \ker A = \dim \ker B$ که چون کمی قبل‌تر ثابت کرده بودیم $\dim V = \dim \ker A + \dim \ker B$ پس $\dim V = 2 \dim \ker A$ و حکم ثابت می‌شود.

(آ) ابتدا بردارهای پایه α و β را در فضای P_2 (چند جمله‌ای‌ها با درجه حداکثر ۲) را به صورت ضرایب در پایه‌ی استاندارد چند جمله‌ای‌های درجه ۲ یعنی $\{x^2, x, 1\}$ نشان می‌دهیم:

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \quad \text{و} \quad \beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\},$$

که در آن:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

در نتیجه ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ستون‌های } P_\alpha \text{ بردارهای پایه } \alpha \text{ هستند})$$

$$P_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad (\text{ستون‌های } P_\beta \text{ بردارهای پایه } \beta \text{ هستند})$$

براساس تئوری تغییر مبنا، اگر برای هر بردار $p(x)$ رابطه

$$[p(x)]_\alpha = P_\alpha^{-1} [p(x)]_{\text{std}} \quad \text{و} \quad [p(x)]_\beta = P_\beta^{-1} [p(x)]_{\text{std}}$$

را داشته باشیم، با حذف $[p(x)]_{\text{std}}$ به نتیجه می‌رسیم:

$$[p(x)]_\beta = P_\beta^{-1} P_\alpha [p(x)]_\alpha.$$

بنابراین ماتریس تغییر مبنا از α به β برابر است با:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = P_\beta^{-1} P_\alpha.$$

با استفاده از روش Augmented Matrix ماتریس P_β^{-1} را بدست می‌آوریم. ابتدا ماتریس P_β را به همراه ماتریس همانی I_3 به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

با استفاده از عملیات‌های سطری (Elementary Row Operations) قسمت سمت چپ ماتریس را به ماتریس همانی تبدیل می‌کنیم. برای سادگی مخرج کسرها را از بین می‌بریم و به

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

می‌رسیم. حال به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -17 & 17 & -9 & 2 & -6 \\ 0 & 14 & -15 & 6 & 0 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 6 & -6 & -4 \\ 0 & -17 & 17 & -9 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -\frac{R_2}{17} \\ R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 6 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{17} & -\frac{2}{17} & \frac{6}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{24}{17} & -\frac{28}{17} & -\frac{18}{17} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 - 4R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{17} & \frac{10}{17} & \frac{4}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{33}{17} & -\frac{30}{17} & \frac{12}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{24}{17} & -\frac{28}{17} & -\frac{18}{17} \end{array} \right]$$

نتیجه نهایی به دست می‌آید:

$$P_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{17} & \frac{10}{17} & \frac{4}{17} \\ \frac{33}{17} & -\frac{30}{17} & \frac{12}{17} \\ \frac{24}{17} & -\frac{28}{17} & -\frac{18}{17} \end{pmatrix}.$$

حال ماتریس تبدیل پایه‌ی $P_{\alpha \rightarrow \beta}$ را بدست می‌آوریم:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = P_{\beta}^{-1} P_{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{6}{17} & \frac{10}{17} & \frac{4}{17} \\ \frac{23}{17} & -\frac{30}{17} & \frac{12}{17} \\ \frac{24}{17} & -\frac{28}{17} & -\frac{18}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{182}{17} \\ \frac{144}{17} & -\frac{18}{17} & -\frac{324}{17} \\ \frac{17}{4} & -\frac{17}{64} & -\frac{85}{17} \end{pmatrix}$$

(ب) ابتدا $p(x)$ را بدست می‌آوریم:

$$p(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - x + 4) + \frac{1}{3}(x^2 + \frac{1}{2}x - 3) + \frac{1}{6}(\frac{2}{5}x^2 + 3x + 1) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}.$$

حال برای بدست آوردن بردار مختصات $p(x)$ در پایه‌ی β یعنی بردار مختصات $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ ، باید معادلات زیر را حل کنیم:

$$p(x) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{5}{6} = \beta_1(x^2 + \frac{3}{2}x - 1) + \beta_2(\frac{1}{3}x^2 - x + 2) + \beta_3(x - \frac{5}{2}) \rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \frac{1}{3}\beta_3 = \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3}\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = \frac{1}{6} \\ -\beta_1 + 2\beta_2 - \frac{5}{2}\beta_3 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

با حل معادلات خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{13}{15} \\ \beta_2 = \frac{8}{5} \\ \beta_3 = \frac{5}{15} \end{cases}$$

$$\text{در نتیجه } [p(x)]_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{13}{15} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{5}{15} \end{pmatrix}$$

(ج) برای نشان دادن تساوی خواسته شده کافی است ماتریس تبدیل پایه‌ی بدست آمده در بخش اول را در بردار مختصات $[p(x)]_{\alpha}$ ضرب کنیم و نتیجه بگیریم که حاصل برابر با بردار مختصات $[p(x)]_{\beta}$ است.

(د) برای پیدا کردن رابطه‌ی کلی بین بردار مختصات نسبت به پایه‌های α و β ، ابتدا $q(x)$ را در پایه‌های داده شده می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} ax^2 + bx + c = \alpha_1 x^2 + \alpha_2(3x^2 - x) + \alpha_3(4x - 2) \\ ax^2 + bx + c = \beta_1(2x^2 - 1) + \beta_2(3x + 2) + \beta_3(x^2 + x + 2) \end{cases} \\ \rightarrow \alpha_1 x^2 + \alpha_2(3x^2 - x) + \alpha_3(4x - 2) = \beta_1(2x^2 - 1) + \beta_2(3x + 2) + \beta_3(x^2 + x + 2) \\ \rightarrow x^2(\alpha_1 + 3\alpha_2) + x(-\alpha_2 + 4\alpha_3) - 2\alpha_3 = x^2(2\beta_1 + \beta_3) + x(3\beta_2 + \beta_3) + (\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3) \end{aligned}$$

با برقراری تناظر بین دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 2\beta_1 + \beta_3, \\ \alpha_2 + 4\alpha_3 = 3\beta_2 + \beta_3, \\ -2\alpha_3 = \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 \end{cases}$$

برای حل دستگاه معادلات بالا و بدست آوردن ضرایب α_i بر حسب ضرایب β_j ، از روش حل معادله‌ی ماتریسی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

قرار دهید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

در نتیجه

$$\rightarrow A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = A^{-1} B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

حال لازم است A^{-1} را بدست آوریم. ماتریس A را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و با استفاده از عملیات سطری، معکوس ماتریس را محاسبه می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2]{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

در نتیجه A^{-1} برابر است با:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

حال با جاگذاری A^{-1} در معادله خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\beta_1 + \beta_3 \\ 3\beta_2 + \beta_3 \\ \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -4\beta_1 - 21\beta_2 - 20\beta_3, \\ \alpha_2 = 2\beta_1 + 7\beta_2 + 7\beta_3, \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2}\beta_1 - \beta_2 - \frac{3}{2}\beta_3. \end{cases}$$

پاسخ ۵ (۰ نمره)

$$\int_{\mathbb{R}} (Df)(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x) dx \quad (1)$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x) dx \quad (2)$$

پس می‌توان نوشت:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} f(x)(-Dg)(x) dx \quad (3)$$

از آنجا که f و g در $\pm\infty$ صفر می‌شوند، جمله‌ی $\left[f(x)g(x) \right]_{-\infty}^{+\infty}$ صفر خواهد شد. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\int_{\mathbb{R}} (Df)(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)(-Dg)(x) dx \quad (4)$$

که به صورت ضرب داخلی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\langle Df, g \rangle = \langle f, -Dg \rangle, \quad \forall f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \quad (5)$$

در نتیجه، داریم:

$$D^* = -D \quad (6)$$

پاسخ ۶ (۰ نمره) با استفاده از $BC^*B = \bullet_n$ داریم:

$$ABC + CBA + I_n = I_n + CBA + ABC + \bullet_n = (I + ABC)(I + CBA)$$

$$\implies \det(ABC + CBA + I_n) = \det(I + ABC) \det(I + CBA) \quad (i)$$

حال چون A, C وارون‌پذیر هستند و $AC = CA$ می‌دانیم:

$$\det(I + ABC)$$

$$\begin{aligned}
&= \det(C) \det(I + ABC) \det(C^{-1}) \\
&= \det(I + CAB) \\
&= \det(I + ACB) \\
&= \det(A^{-1}) \det(I + ACB) \det(A) \\
&= \det(I + CBA)
\end{aligned}$$

با استفاده از معادله (i):

$$\det(ABC + CBA + I_n) = \det(I + ABC) \det(I + CBA) = \det(I + ABC)^2 \geq 0$$

و حکم اثبات می شود.

پاسخ ۷ (نمره ۰) با توجه به اینکه رنک ماتریس M یک است، این یعنی فضای ستونی آن دارای بعد یک می باشد. در نتیجه، پایه این فضا تنها یک عضو دارد که آن را با u نشان می دهیم. در نتیجه، فضای ستونی شامل بردارهای به شکل αu است که α یک عدد حقیقی می باشد. در نتیجه ستون های این ماتریس به صورت $\alpha_1 u, \dots, \alpha_n u$ می باشند. اگر بردار $v = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$ را در نظر بگیریم، ماتریس M دقیقاً به شکل uv^T ساخته می شود. در ادامه، حکم اصلی سوال را اثبات می کنیم. با توجه به روند سوال تا الان، حکم را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

$$\det(I + uv^T) = 1 + \text{tr}(uv^T)$$

در ادامه، از لم Matrix Determinant استفاده می کنیم. این قضیه و اثبات آن در ویکی پدیا موجود است ولی در اینجا نیز آن را می نویسیم. عبارت ساده شده این لم دقیقاً برابر حکم جدید است. ابتدا به عبارت زیر دقت کنید.

$$\begin{bmatrix} I & \cdot \\ T & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + uv^T & u \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \cdot \\ -v^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & u \\ \cdot & 1 + v^T u \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس های چپ و راست عبارت سمت چپ برابر یک می باشد چرا که ماتریس های مثلثی و عناصر روی قطر آن ها همگی یک است. دترمینان ماتریس وسط عبارت سمت چپ نیز به سادگی با گرفتن دترمینان از سطر پایین برابر $\det(I + uv^T)$ خواهد بود. دترمینان ماتریس عبارت سمت راست نیز برابر $1 + v^T u$ است چرا که یک ماتریس مثلثی است. در نتیجه، عبارت زیر بدست می آید.

$$\det(I + uv^T) = 1 + v^T u$$

در نهایت، دقت کنید که $v^T u$ یک عدد حقیقی است و Trace آن با خودش برابر است. در نتیجه می توانیم عبارت زیر را نتیجه بگیریم.

$$v^T u = \text{tr}(v^T u) = \text{tr}(uv^T)$$

در نهایت، حکم جدید اثبات می شود.

پاسخ ۸ (نمره ۰)

(i) با استفاده از ضرب ماتریس های بلوکی داریم:

$$\begin{bmatrix} I & \cdot \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} I & \cdot \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \cdot & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

با گرفتن دترمینان از دو طرف:

$$\det \left(\begin{bmatrix} I & \cdot \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} M \right) = \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ \cdot & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \right).$$

از آنجا که دترمینان یک ماتریس مثلثی بلوکی برابر دترمینان حاصل ضرب عناصر قطری آن است خواهیم داشت:

$$\det(M) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B).$$

از آنجا که A و C جابجاپذیرند، بنابراین A^{-1} و C نیز جابجاپذیرند که منجر به رابطه زیر می شود:

$$\det(A) \det(D - CA^{-1}B) = \det(A) \det(D - A^{-1}CB) = \det(AD - CB).$$

در نتیجه:

$$\det(M) = \det(AD - CB).$$

از آنجا که فرض شده M وارون پذیر است، پس $AD - CB$ نیز وارون پذیر خواهد بود.

(ii) ماتریس افزوده را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$[M \mid I] = \left[\begin{array}{cc|c} A & B & I \\ C & D & \cdot \\ \hline & & I \end{array} \right].$$

با انجام عملیات سطری بلوکی:

$$R_2 \leftarrow R_2 - CA^{-1}R_1$$

داریم:

$$\left[\begin{array}{cc|c} A & B & I \\ \cdot & D - CA^{-1}B & \cdot \\ \hline & & -CA^{-1} \quad I \end{array} \right].$$

از آنجا که A و C جابجاپذیرند، می توان $D - CA^{-1}B$ را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$D - CA^{-1}B = A^{-1}(AD - CB).$$

پس خواهیم داشت:

$$\left[\begin{array}{cc|c} A & B & I \\ \cdot & A^{-1}(AD - CB) & \cdot \\ \hline & & -CA^{-1} \quad I \end{array} \right].$$

با ضرب سطر دوم در $(A^{-1}(AD - CB))^{-1}$:

$$R_2 \leftarrow (A^{-1}(AD - CB))^{-1}R_2$$

نتیجه می گیریم:

$$\left[\begin{array}{cc|c} A & B & I \\ \cdot & I & \cdot \\ \hline & -(AD - CB)^{-1}ACA^{-1} & (AD - CB)^{-1}A \end{array} \right].$$

برای تبدیل این ماتریس افزوده به $[I \mid M^{-1}]$ ، تنها کافی است R_1 را تغییر دهیم و R_2 ثابت می ماند، لذا:

$$V = (AD - CB)^{-1}A$$

و در نتیجه داریم:

$$(AD - CB)^{-1} = VA^{-1}.$$