

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۴



مقدار و بردار ویژه، ماتریس های متقارن، تجزیه مقدار نکین

تمرین پنجم

تاریخ انتشار: ۲۶ اردیبهشت ۱۴۰۴

پرسش ۱ (۰ نمره) موارد زیر را به طور کامل اثبات کنید.

- (آ) فرض کنید $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(V)$, $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ یک چندجمله‌ای غیر ثابت باشد و $\alpha \in \mathbb{C}$. ثابت کنید که α یک مقدار ویژه $p(T)$ است اگر و تنها اگر به ازای یک مقدار ویژه λ از T ، تساوی $\alpha = p(\lambda)$ برقرار باشد.
- (ب) فرض کنید V یک فضای برداری با ابعاد متناهی باشد و $T \in \mathcal{L}(V)$ یک تبدیل خطی روی V باشد و همچنین $\lambda \in \mathbb{F}$. نشان دهید به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، وجود دارد α به طوری که $|\alpha - \lambda| < \varepsilon$ و $T - \alpha I$ معکوس پذیر است.
- (ج) فرض کنید H و F دو ماتریس $n \times n$ باشند به طوری که:

$$HF - FH = 2^{2019}F$$

فرض کنید v یک بردار ویژه از H باشد به طوری که $Fv \neq 0$. ثابت کنید عدد صحیح مثبتی مانند k وجود دارد به طوری که $F^k v$ یک بردار ویژه برای F باشد.

پرسش ۲ (۰ نمره) فرض کنید دنباله $\{a_n\}$ به صورت بازگشتی تعریف شده باشد:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad \text{برای } n \geq 0.$$

فرمول صریح برای جمله عمومی a_n را بیابید.

پرسش ۳ (۰ نمره) دو ماتریس $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را در نظر بگیرید به صورتی که رابطه $AB = BA$ برقرار است. نشان دهید:

- (آ) اگر A, B مقدار ویژه متمایز داشته باشد آنگاه ماتریس های A و B قطری شدنی خواهند بود.
- (ب) اگر A و B قطری شدنی باشند، ماتریس معکوس پذیر P وجود خواهد داشت به گونه‌ای که هر دو ماتریس $D_1 = P^{-1}AP$ و $D_2 = P^{-1}BP$ قطری باشند. در این حالت A و B را **قطری شدنی همزمان** می‌نامیم. به عبارتی می‌توانیم هر دو ماتریس را به صورت همزمان و در یک پایه‌ی مشترک قطری کنیم. آیا عکس این رابطه نیز برقرار است؟ (یعنی اگر A و B همزمان قطری شدنی باشند، می‌توان گفت $AB = BA$ ؟)

با استفاده از این نتیجه، می‌توان نشان داد که $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$ و لذا، ماتریس e^{tA} ماتریسی معکوس پذیر با معکوس e^{-tA} خواهد بود (حتی اگر A معکوس پذیر نباشد). این گزاره صرفاً برای اطلاعات بیشتر شماسست و نیازی به اثبات آن نیست.

پرسش ۴ (۰ نمره) تجزیه مقادیر منفرد SVD برای ماتریس های زیر را بیابید:

(الف)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

پرسش ۵ (۰ نمره) با فرض رنک کامل بودن ماتریس A اثبات کنید که جواب مسئله‌ی بهینه سازی

$$\min_x \|Ax - b\|$$

برابر با

$$\hat{x} = V\Sigma^{-1}U^T b$$

است که U, V, Σ مربوط به تجزیه‌ی SVD ماتریس A هستند.

پرسش ۶ (۰ نمره) نرم فروبینیوس برای ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}\{A^T A\}}$$

۱. ثابت کنید:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|^2}$$

۲. اگر مقادیر تکین ماتریس A را با $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ نشان دهیم ثابت کنید:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}$$

۳. ثابت کنید:

$$\sigma_{\max}(A) \leq \|A\|_F \leq \sqrt{r} \sigma_{\max}(A)$$

پرسش ۷ (۰ نمره) A ماتریسی است که Singular Value Decomposition آن به صورت $A = U \Sigma V^T$ به دست آمده است که $V = [v_1, \dots, v_n]$ و $U = [u_1, \dots, u_m]$ اگر $r = \text{rank}(A)$ باشد، نشان دهید:

$$\forall i \in 1, \dots, r \quad A^T u_i = \sigma_i v_i$$