

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۴



مقدار و بردار ویژه، ماتریس های متقارن، تجزیه مقدار تکین

تمرین پنجم

تاریخ انتشار: ۲۶ اردیبهشت ۱۴۰۴

پرسش ۱ (۰ نمره) موارد زیر را به طور کامل اثبات کنید.

- (آ) فرض کنید $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(V)$, $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ یک چندجمله‌ای غیر ثابت باشد و $\alpha \in \mathbb{C}$. ثابت کنید که α یک مقدار ویژه $p(T)$ است اگر و تنها اگر به ازای یک مقدار ویژه λ از T ، تساوی $\alpha = p(\lambda)$ برقرار باشد.
- (ب) فرض کنید V یک فضای برداری با ابعاد متناهی باشد و $T \in \mathcal{L}(V)$ یک تبدیل خطی روی V باشد و همچنین $\lambda \in \mathbb{F}$. نشان دهید به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، وجود دارد α به طوری که $|\alpha - \lambda| < \varepsilon$ و $T - \alpha I$ معکوس پذیر است.
- (ج) فرض کنید H و F دو ماتریس $n \times n$ باشند به طوری که:

$$HF - FH = 2^{2019}F$$

فرض کنید v یک بردار ویژه از H باشد به طوری که $Fv \neq 0$. ثابت کنید عدد صحیح مثبتی مانند k وجود دارد به طوری که $F^k v$ یک بردار ویژه برای F باشد.

پرسش ۲ (۰ نمره) فرض کنید دنباله $\{a_n\}$ به صورت بازگشتی تعریف شده باشد:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad \text{برای } n \geq 0.$$

فرمول صریح برای جمله عمومی a_n را بیابید.

پرسش ۳ (۰ نمره) دو ماتریس $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را در نظر بگیرید به صورتی که رابطه $AB = BA$ برقرار است. نشان دهید:

- (آ) اگر A, B مقدار ویژه متمایز داشته باشد آنگاه ماتریس های A و B قطری شدنی خواهند بود.
- (ب) اگر A و B قطری شدنی باشند، ماتریس معکوس پذیر P وجود خواهد داشت به گونه‌ای که هر دو ماتریس $D_1 = P^{-1}AP$ و $D_2 = P^{-1}BP$ قطری باشند. در این حالت A و B را **قطری شدنی همزمان** می‌نامیم. به عبارتی می‌توانیم هر دو ماتریس را به صورت همزمان و در یک پایه‌ی مشترک قطری کنیم. آیا عکس این رابطه نیز برقرار است؟ (یعنی اگر A و B همزمان قطری شدنی باشند، می‌توان گفت $AB = BA$ ؟)

با استفاده از این نتیجه، می‌توان نشان داد که $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$ و لذا، ماتریس e^{tA} ماتریسی معکوس پذیر با معکوس e^{-tA} خواهد بود (حتی اگر A معکوس پذیر نباشد). این گزاره صرفاً برای اطلاعات بیشتر شماسست و نیازی به اثبات آن نیست.

پرسش ۴ (۰ نمره) تجزیه مقادیر منفرد SVD برای ماتریس های زیر را بیابید:

(الف)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

پرسش ۵ (۰ نمره) با فرض رنک کامل بودن ماتریس A اثبات کنید که جواب مسئله‌ی بهینه سازی

$$\min_x \|Ax - b\|$$

برابر با

$$\hat{x} = V\Sigma^{-1}U^T b$$

است که U, V, Σ مربوط به تجزیه‌ی SVD ماتریس A هستند.

پرسش ۶ (۰ نمره) نرم فروبینیوس برای ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}\{A^T A\}}$$

۱. ثابت کنید:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|^2}$$

۲. اگر مقادیر تکی ماتریس A را با $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ نشان دهیم ثابت کنید:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}$$

۳. ثابت کنید:

$$\sigma_{\max}(A) \leq \|A\|_F \leq \sqrt{r} \sigma_{\max}(A)$$

پرسش ۷ (۰ نمره) A ماتریسی است که Singular Value Decomposition آن به صورت $A = U \Sigma V^T$ به دست آمده است که $V = [v_1, \dots, v_n]$ و $U = [u_1, \dots, u_m]$ اگر $r = \text{rank}(A)$ باشد، نشان دهید:

$$\forall i \in 1, \dots, r \quad A^T u_i = \sigma_i v_i$$

پاسخ ۱ (۰ نمره)

(آ) $(\Rightarrow)$ فرض کنید α یک مقدار ویژه $p(T)$ باشد. بنابراین $p(T) - \alpha I$ یک به یک نیست. طبق قضیه اساسی جبر، ضرایب $c, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ وجود دارند به طوری که:

$$p(z) - \alpha = c(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m).$$

اگر $c = 0$ ، آنگاه $p(z) = \alpha$ و p ثابت است که تناقض است. بنابراین $c \neq 0$. با معادله بالا داریم:

$$p(T) - \alpha I = c(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I).$$

از آنجا که $p(T) - \alpha I$ یک به یک نیست، یک $j \in \{1, \dots, m\}$ وجود دارد به طوری که $T - \lambda_j I$ یک به یک نیست. به عبارت دیگر، λ_j یک مقدار ویژه T است. علاوه بر این، داریم:

$$p(\lambda_j) - \alpha = 0,$$

و بنابراین $\alpha = p(\lambda_j)$ همان طور که خواسته شد.

($\Leftarrow$) فرض کنید $\alpha = p(\lambda)$ برای یک مقدار ویژه λ از T . فرض کنید $v \in V - \{0\}$ بردار ویژه متناظر با λ باشد. ضرایب $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ به طوری وجود دارند که:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

با توجه به اینکه $T^k v = \lambda^k v$ برای هر $k \in \mathbb{Z}^+$ ، نتیجه می شود:

$$a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n = \alpha.$$

و بنابراین:

$$p(T)v = a_0 v + a_1 T v + \cdots + a_n T^n v = a_0 v + a_1 \lambda v + \cdots + a_n \lambda^n v = (a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n) v = \alpha v.$$

بنابراین α یک مقدار ویژه $p(T)$ است و اثبات کامل می شود.

□

(ب) دو حالت مختلف می توان برای مقدار λ متصور شد.

- حالت یک: λ مقدار ویژه نیست. در این حالت طبق تعریف مقدار ویژه $0 \neq \det(T - \lambda I)$ و در نتیجه با انتخاب $\alpha = \lambda$ داریم $|\alpha - \lambda| = 0 < \varepsilon$ و $T - \alpha I = T - \lambda I$ معکوس پذیر است.
- حالت یک: λ مقدار ویژه است. فرض کنید $\sigma(T)$ برابر مجموعه ی مقادیر ویژه ی T باشد:

$$\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

با توجه به این که V یک فضای متناهی است، $\sigma(T)$ نیز متناهی است. برای سادگی فرض می کنیم $\lambda = \lambda_1$. اکنون کمینه ی فاصله ی این مقدار ویژه با مقادیر ویژه ی دیگر را محاسبه می کنیم.

$$d = \min_{2 \leq k \leq n} |\lambda_k - \lambda_1|.$$

اگر تنها یک مقدار ویژه وجود داشت، می توان d را برابر با هر مقدار مثبت دل خواه در نظر گرفت. اکنون مقدار α را به صورت زیر انتخاب می کنیم.

$$\alpha = \lambda + t \quad \text{s.t.} \quad 0 < t < \min(d, \varepsilon).$$

در این صورت به سادگی می توان نتیجه گرفت که خواسته ی مسئله به دست می آید چرا که مقدار α مقدار ویژه نیست.

(ج) فرض کنید $Hv = \lambda v$.

با ضرب v در طرف راست معادله داده شده، داریم:

$$HFv = (2^{2019} + \lambda)Fv.$$

دوباره با ضرب Fv در معادله داده شده، خواهیم داشت:

$$HF^2v = (2^{2019} \times 2 + \lambda)F^2v.$$

از آنجا که تعداد مقادیر ویژه متناهی است، با تکرار این فرآیند، حداقل عدد صحیح مثبتی k به دست می آید به طوری که:

$$F^{k+1}v = 0 \quad \text{و} \quad F^k v \neq 0.$$

بنابراین، $F^k v$ یک بردار ویژه برای F می شود.

پاسخ ۲ (۰ نمره) فرمول بازگشتی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}.$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ماتریس را به صورت A تعریف می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

مقادیر ویژه A عبارت اند از:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{و} \quad \lambda_2 = 3,$$

و بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه عبارت اند از:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

قطری سازی A به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

محاسبات نشان می دهد که فرمول صریح برابر است با:

$$a_n = 2^{n+1} - 3^n \quad \text{برای } n \geq 0.$$

پاسخ ۳ (۰ نمره)

(آ) در ابتدا نشان می دهیم که اگر A دارای n مقدار ویژه متمایز باشد، آنگاه قطری پذیر خواهد بود.

برای این منظور، دقت کنید که می دانیم اگر بردار ویژه متناظر به مقدار ویژه i ام ماتریس A یا همان $\lambda_i(A)$ را با v_i نمایش دهیم، مجموعه $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ یک مجموعه مستقل خطی خواهد بود. حال قرار می دهیم:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(A) \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A))$$

$$P = [v_1 | v_2 | \cdots | v_n]$$

ماتریس P وارون پذیر است، زیرا ستون های آن مستقل خطی هستند و در نتیجه خواهیم داشت:

$$AP = [Av_1 | Av_2 | \cdots | Av_n] = [\lambda_1(A)v_1 | \lambda_2(A)v_2 | \cdots | \lambda_n(A)v_n] = P\Lambda$$

$$\implies A = P\Lambda P^{-1}$$

یعنی A قطری پذیر است.

از طرف دیگر با جایگذاری A (با توجه به تساوی بالا) در فرض مسئله می توان نوشت:

$$AB = BA \implies P\Lambda P^{-1}B = BP\Lambda P^{-1}$$

$$\implies P^{-1}P\Lambda P^{-1}BP = P^{-1}BP\Lambda P^{-1}P$$

$$\implies \Lambda P^{-1}BP = P^{-1}BP\Lambda$$

بنابراین اگر

$$\tilde{B} = P^{-1}BP$$

باشد، خواهیم داشت:

$$\Lambda \tilde{B} = \tilde{B} \Lambda$$

دقت کنید که در تساوی بالا، درایه واقع در تقاطع سطر i ام و ستون j ام ماتریس سمت چپ برابر $\lambda_i(A)\tilde{B}_{ij}$ و همین درایه در ماتریس سمت راست برابر $\lambda_j(A)\tilde{B}_{ij}$ می باشد و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\lambda_i(A)\tilde{B}_{ij} = \lambda_j(A)\tilde{B}_{ij} \implies (\lambda_i(A) - \lambda_j(A))\tilde{B}_{ij} = 0$$

می دانیم که اگر $i \neq j$ باشد، آنگاه $\lambda_j(A) \neq \lambda_i(A)$ با به طور معادل $\lambda_j(A) - \lambda_i(A) \neq 0$ می باشد. در نتیجه با توجه به تساوی بالا می توان نوشت:

$$1 \leq i \neq j \leq n; \quad \tilde{B}_{ij} = 0$$

پس B یک ماتریس قطری بوده و چون $B = P\tilde{B}P^{-1}$ می باشد، ماتریس $\tilde{B}$ نیز قطری پذیر است. در نهایت دقت کنید که داریم:

$$AB = P\Lambda P^{-1}P\tilde{B}P^{-1} = P\Lambda\tilde{B}P^{-1}$$

به وضوح ماتریس $D = \Lambda\tilde{B}$ قطری می باشد، چرا که حاصلضرب دو ماتریس قطری است. بنابراین ماتریس $AB = PDP^{-1}$ نیز قطری خواهد بود. (ب) فرض کنید A و B قطری شدنی باشند. بنابراین ماتریس معکوس پذیری مانند P وجود دارد به طوری که:

$$D_1 = P^{-1}AP, \quad D_2 = P^{-1}BP$$

که در آن D_1 و D_2 ماتریس های قطری هستند.

پس:

$$A = PD_1P^{-1}, \quad B = PD_2P^{-1}$$

حال بررسی می کنیم:

$$AB = PD_1P^{-1}PD_2P^{-1} = PD_1D_2P^{-1}$$

$$BA = PD_2D_1P^{-1}$$

از آنجایی که D_1 و D_2 ماتریس های قطری هستند، آن ها با هم جابجاپذیرند:

$$D_1D_2 = D_2D_1 \implies AB = BA$$

بنابراین، اگر A و B به صورت همزمان قطری شدنی باشند، آنگاه آن ها جابجاپذیر نیز هستند.

پاسخ ۴ (۰ نمره)

(الف) ابتدا ترانهادهی ماتریس را به دست می آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

سپس $A^T A$ را محاسبه می کنیم:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مقادیرهای ویژه و بردارهای ویژه‌ی این ماتریس را به دست می‌آوریم:

$$\lambda_1 = 3, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 1, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = 0, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر منفرد برابرند با:

$$\sigma_1 = \sqrt{3}, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0$$

ماتریس Σ به صورت زیر است:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.732 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه را نرمال‌سازی می‌کنیم تا ستون‌های V را بسازیم:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.816 & 0 & -0.577 \\ -0.408 & 0.707 & -0.577 \\ 0.408 & 0.707 & 0.577 \end{bmatrix}$$

اکنون بردارهای u_i را با استفاده از رابطه‌ی $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ به دست می‌آوریم:

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس U به شکل زیر است:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

در نتیجه تجزیه مقدار منفرد به صورت زیر خواهد بود:

$$A = U \Sigma V^T$$

(ب) ابتدا ترانپوز ماتریس را به دست می‌آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

سپس $W = A A^T$ را محاسبه می‌کنیم:

$$W = A A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

مقادیرهای ویژه‌ی W عبارتند از:

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 0$$

بردارهای ویژه‌ی متناظر:

$$\lambda_1 = 9 \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 4 \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = 0 \Rightarrow \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نرمال‌سازی بردارها برای ساخت ماتریس U :

$$U = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

ماتریس Σ شامل ریشه مربع مقادیر ویژه (غیر صفر):

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اکنون V را از رابطه‌ی $\vec{v}_i = \frac{1}{\sigma_i} A^T \vec{u}_i$ برای σ_1 و σ_2 محاسبه می‌کنیم و بردار سوم را به صورت متعامد کامل می‌کنیم. فرض می‌کنیم به دست آمده:

$$V = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

در نتیجه:

$$A = U \Sigma V^T$$

پاسخ ۵ (۰ نمره) مسئله‌ی بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_x \|Ax - b\|_2$$

این مسئله معادل است با کمینه‌سازی تابع زیر:

$$f(x) = \|Ax - b\|_2^2 = (Ax - b)^T (Ax - b)$$

برای پیدا کردن نقطه‌ی بهینه، گرادیان تابع $f(x)$ را محاسبه کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\nabla f(x) = 2A^T(Ax - b) = 0$$

با ساده‌سازی، به معادله‌ی نرمال می‌رسیم:

$$A^T A x = A^T b$$

چون فرض کرده‌ایم که A دارای رتبه‌ی کامل است، پس $A^T A$ معکوس‌پذیر است. بنابراین، جواب منحصر به فرد مسئله برابر است با:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

حال فرض می‌کنیم تجزیه‌ی SVD ماتریس A به صورت زیر باشد:

$$A = U \Sigma V^T$$

در این صورت داریم:

$$A^T A = (V \Sigma^T U^T)(U \Sigma V^T) = V \Sigma^T \Sigma V^T$$

چون U ماتریسی متعامد است، $U^T U = I$. پس:

$$A^T A = V(\Sigma^T \Sigma)V^T$$

و همچنین:

$$A^T b = V \Sigma^T U^T b$$

حال با جایگذاری در رابطه‌ی اصلی:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = (V(\Sigma^T \Sigma)V^T)^{-1} V \Sigma^T U^T b$$

از خواص ماتریس‌های متعامد استفاده می‌کنیم:

$$(V(\Sigma^T \Sigma)V^T)^{-1} = V(\Sigma^T \Sigma)^{-1} V^T$$

در نتیجه:

$$\hat{x} = V(\Sigma^T \Sigma)^{-1} V^T V \Sigma^T U^T b = V(\Sigma^T \Sigma)^{-1} \Sigma^T U^T b$$

از آنجا که $\Sigma^T \Sigma$ قطری است و وارون آن وجود دارد، داریم:

$$(\Sigma^T \Sigma)^{-1} \Sigma^T = \Sigma^{-1}$$

پس در نهایت:

$$\hat{x} = V \Sigma^{-1} U^T b$$

که همان رابطه‌ی مورد نظر است.

پاسخ ۶ (۰ نمره)

۱. با توجه به تعریف:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^\top A)}$$

ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$A^\top A = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ a_2^\top \\ \vdots \\ a_n^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

درایه‌های قطری ماتریس $A^\top A$ برابر است با:

$$(A^\top A)_{ii} = \|a_i\|^2 = \sum_{j=1}^m a_{ij}^2$$

در نتیجه:

$$\text{tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2$$

پس داریم:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2}$$

۲. فرض کنید تجزیه SVD ماتریس A به صورت زیر باشد:

$$A = U \Sigma V^\top$$

در این صورت:

$$A^\top A = V \Sigma^\top U^\top U \Sigma V^\top = V \Sigma^\top \Sigma V^\top$$

از آنجایی که V ماتریس متعامد است، داریم:

$$\text{tr}(A^\top A) = \text{tr}(V \Sigma^\top \Sigma V^\top) = \text{tr}(\Sigma^\top \Sigma)$$

و چون Σ شامل مقادیر تکین σ_i است، پس:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^\top A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}$$

۳. با توجه به رابطه بالا:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}$$

از نامساوی جبری استفاده می‌کنیم:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \leq r \cdot \sigma_{\max}^2 \Rightarrow \|A\|_F \leq \sqrt{r} \cdot \sigma_{\max}$$

همچنین چون $\sigma_{\max}$ یکی از مقادیر در مجموع است، داریم:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} \geq \sqrt{\sigma_{\max}^2} = \sigma_{\max}$$

در نتیجه:

$$\sigma_{\max}(A) \leq \|A\|_F \leq \sqrt{r} \sigma_{\max}(A)$$

پاسخ ۷ (۰ نمره)

$$A^\top = (U \Sigma V^\top)^\top = V \Sigma^\top U^\top$$

با توجه به این که Σ یک ماتریس قطری است، $\Sigma = \Sigma^\top$:

$$A^\top = V \Sigma U^\top$$

طبق خاصیت Orthogonality در ماتریس U می‌دانیم $U^\top U = I$ و در نتیجه $U^\top u_i = e_i$.

$$A^\top u_i = V \Sigma U^\top u_i = V \Sigma e_i = V \sigma_i e_i = \sigma_i (V e_i) = \sigma_i v_i$$