به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
زمستان ۱۴۰۴

فضای نرم، مشتق و کمترین مربعات | **تمرین هفتم** | تاریخ انتشار: ۲۹ دی ۱۴۰۴

پرسش ۱ (۱۵ نمره) ماتریس A یک ماتریس $m \times n$ است و b یک بردار در $\mathbb{R}^m$ است. هر عبارت را به درستی یا نادرستی علامت بزنید. هر پاسخ را توضیح دهید.

الف. مسأله مقدماتی کم‌ترین مربعات برای یافتن یک x است که Ax را تا حد ممکن به b نزدیک کند.

ب. یک جواب کم‌ترین مربعات برای $Ax = b$ برداری x است که $Ax = \hat{b}$ را ارضا کند، جایی که $\hat{b}$ تصویر عمودی b روی $ColA$ است.

پ. یک جواب کم‌ترین مربعات برای $Ax = b$ برداری $\hat{x}$ است به طوری که $\|b - A\hat{x}\| \leq \|b - Ax\|$ برای همه x در $\mathbb{R}^n$.

ت. هر جوابی از $A^TAx = A^Tb$ یک جواب کم‌ترین مربعات برای $Ax = b$ است.

ث. اگر ستون‌های A مستقل خطی باشند، آنگاه معادله $Ax = b$ دقیقا یک جواب کم‌ترین مربعات دارد.

پرسش ۲ (۲۰ نمره)

الف. فرمولی برای جواب کم‌ترین مربعات برای $Ax = b$ پیدا کنید هنگامی که ستون‌های A عمود یکه هستند.

ب. تمامی جواب‌های کم‌ترین مربعات برای دستگاه:

$$\begin{cases} x + y = ۲ \\ x + y = ۴ \end{cases}$$

توصیف کنید.

پرسش ۳ (۱۵ نمره) نشان دهید که اگر λ مقدار ویژه‌ای از A باشد و $Ax = \lambda x$، آنگاه $|\lambda| \leq \|A\|$.
نرم A عدد $\|A\|$ است که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\|A\| = \max_{x \neq ۰} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

پرسش ۴ (۲۰ نمره) فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ماتریسی باشد با تجزیهٔ مقدار تکین

$$A = U\Sigma V^*,$$

و همچنین $b \in \mathbb{R}^m$ یک بردار دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*, \qquad x^\dagger = A^\dagger b.$$

(آ) ثابت کنید $x^\dagger \in \arg\min_x \|Ax - b\|$.

(ب) ثابت کنید اگر $y \in \arg\min_x \|Ax - b\|$ باشد، آنگاه

$$\|x^\dagger\| \leq \|y\|.$$

پرسش ۵ (۱۵ نمره) فرض کنید

$$\kappa_۲(A) = \|A\|_۲ \|A^{-۱}\|_۲.$$

(آ) نشان دهید

$$\|A\|_۲ = \sigma_۱ \quad \text{و} \quad \|A^{-۱}\|_۲ = ۱/\sigma_n,$$

که در آن $\sigma_۱, \ldots, \sigma_n$ مقادیر تکین ماتریس A هستند.

(ب) نشان دهید که

$$\kappa_۲(A) = \frac{\sigma_۱}{\sigma_n}.$$

(ج) اگر A مرتبهٔ کامل نباشد ($\text{rank}(A) < n$)، مقدار $\kappa_۲(A)$ چه خواهد بود؟ جواب خود را با استفاده از مقادیر تکین توضیح دهید.

پرسش ۶ (۱۵ نمره) هر یک از مشتق‌ها را به طور کامل محاسبه کنید (کلیه مراحل را بنویسید).

(آ) $\frac{\partial(\mathbf{x}^T\mathbf{a})}{\partial\mathbf{x}}$

(ب) $\frac{\partial(\mathbf{x}^T A\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}$

(ج) $\frac{\partial \det(A)}{\partial A}$

(د) $\frac{\partial \det(A(t))}{\partial t}$

(ه) $\frac{\partial \text{trace}(BA^{-1})}{\partial A}$