

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۴



تاریخ برگزاری: ۲۶ آبان ۱۴۰۴

کویز دوم

نام و شماره دانشجویی:

پرسش ۱ (۰/۶ نمره) فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. اگر

$$\dim(\text{Range}(A)) = \dim(\text{Range}(A^T))$$

نشان دهید که:

$$\text{Range}(A) \cap \text{Null}(A) = \{0\}$$

پرسش ۲ (۰/۶ نمره) فرض کنید $A_1, \dots, A_m$ ماتریس‌های مربعی $n \times n$ باشند. نشان دهید نابرابری زیر برقرار است:

$$\text{rank}\left(\sum_{i=1}^m A_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \text{rank}(A_i)$$

سپس یک شرط کافی نابدهی برای برقراری تساوی در حالت $m = 2$ معرفی کنید. به عبارت دیگر یک شرط کافی برای ماتریس‌های مربعی A و B بیان کنید که در صورت برقراری آن داشته باشیم:

$$\text{rank}(A + B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

پاسخ ۱ (۰/۶ نمره)

ابتدا به بیان و اثبات چند لم می‌پردازیم.

لم ۱: $\text{Range}(A^T) \subseteq \text{Range}(A)$

اثبات: اگر $x \in \text{Range}(A^T)$ ، آنگاه بردار y وجود دارد به طوری که:

$$x = A^T y$$

$$x = A(A^T y)$$

$$x \in \text{Range}(A)$$

پس داریم:

$$\text{Range}(A^T) \subseteq \text{Range}(A)$$

لم ۲: $\text{Null}(A) \subseteq \text{Null}(A^T)$

اثبات: اگر $v \in \text{Null}(A)$ ، آنگاه:

$$Av = 0$$

$$A^T Av = A^T(0) = 0$$

پس $v \in \text{Null}(A^T)$ در نتیجه:

$$\text{Null}(A) \subseteq \text{Null}(A^T)$$

لم ۳: اگر W_1, W_2 زیرفضاهای یک فضای برداری متناهی بعد باشند و $W_1 \subseteq W_2$ و $\dim W_1 = \dim W_2$ ، آنگاه $W_1 = W_2$.
اثبات: بر خلاف ادعا فرض کنید $W_1 \neq W_2$. آنگاه بردار زیر وجود دارد:

$$w \in W_2 \setminus W_1$$

افزودن w به یک پایه از W_1 مجموعه‌ای مستقل بزرگ‌تر می‌سازد، پس:

$$\dim(W_1 + \text{span}\{w\}) = \dim W_1 + 1$$

از طرفی چون:

$$W_1 + \text{span}\{w\} \subseteq W_2$$

داریم:

$$\dim W_2 \geq \dim W_1 + 1$$

که با فرض $\dim W_1 = \dim W_2$ در تناقض است، بنابراین:

$$W_1 = W_2$$

حال طبق صورت سؤال فرض کنید:

$$\dim(\text{Range}(\mathbf{A})) = \dim(\text{Range}(\mathbf{A}^T))$$

از لم ۱ داریم:

$$\text{Range}(\mathbf{A}^T) \subseteq \text{Range}(\mathbf{A})$$

و چون ابعاد این دو فضا برابر است، با لم ۳ نتیجه می‌گیریم:

$$\text{Range}(\mathbf{A}^T) = \text{Range}(\mathbf{A})$$

اکنون از قضیه‌ی Rank–Nullity برای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}^T$ استفاده می‌کنیم:

$$\dim(\text{Range}(\mathbf{A})) + \dim(\text{Null}(\mathbf{A})) = n$$

$$\dim(\text{Range}(\mathbf{A}^T)) + \dim(\text{Null}(\mathbf{A}^T)) = n$$

از برابری $\dim(\text{Range}(\mathbf{A}))$ و $\dim(\text{Range}(\mathbf{A}^T))$ نتیجه می‌شود:

$$\dim(\text{Null}(\mathbf{A})) = \dim(\text{Null}(\mathbf{A}^T))$$

و با لم ۲ و لم ۳ نتیجه می‌گیریم:

$$\text{Null}(\mathbf{A}) = \text{Null}(\mathbf{A}^T)$$

اکنون اگر

$$\mathbf{x} \in \text{Range}(\mathbf{A}) \cap \text{Null}(\mathbf{A}),$$

آنگاه بردار $\mathbf{y}$ وجود دارد به طوری که

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \text{و} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

از $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ داریم:

$$\mathbf{y} \in \text{Null}(\mathbf{A}^T)$$

و چون $\text{Null}(\mathbf{A}^T) = \text{Null}(\mathbf{A})$ ، نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

پس:

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

در نتیجه:

$$\text{Range}(\mathbf{A}) \cap \text{Null}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$$

پاسخ ۲ (۶/۰ نمره) برای شروع، توجه می‌کنیم که اگر $m = 1$ باشد، حکم به صورت

$$\text{rank}(\mathbf{A}_1) \leq \text{rank}(\mathbf{A}_1)$$

درمی‌آید که بدیهی است. پس حکم برای $m = 1$ درست است. اکنون حالت $m = 2$ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس مربعی $n \times n$ باشند. فضای ستونی $\mathbf{A}$ را با $S = \text{Col}(\mathbf{A})$ و فضای ستونی $\mathbf{B}$ را با $T = \text{Col}(\mathbf{B})$ نشان می‌دهیم. طبق تعریف،

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \dim S, \quad \text{rank}(\mathbf{B}) = \dim T.$$

یک پایه برای فضای ستونی $\mathbf{A}$ بگیرید:

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \quad \text{که در آن} \quad k = \text{rank}(\mathbf{A}).$$

این مجموعه را به یک پایه برای جمع دو فضا یعنی $S + T$ گسترش می‌دهیم. یعنی بردارهایی $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell$ در نظر می‌گیریم (که از T می‌آیند) به طوری که

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell\}$$

یک پایه برای $S + T$ باشد. در این صورت

$$\dim(S + T) = k + \ell.$$

از طرف دیگر، چون $T \subseteq S + T$ و $S \subseteq S + T$ داریم

$$\dim(S + T) \leq \dim S + \dim T = \text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B}).$$

$$k + \ell = \dim(S + T) \leq \text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B}).$$

اکنون به ماتریس $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ نگاه می‌کنیم. ستون j -ام این ماتریس برابر است با

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{e}_j = \mathbf{A}\mathbf{e}_j + \mathbf{B}\mathbf{e}_j,$$

که در آن $\mathbf{e}_j$ بردار پایه استاندارد است. بردار $\mathbf{A}\mathbf{e}_j$ در فضای ستونی $\mathbf{A}$ یعنی در S است و بردار $\mathbf{B}\mathbf{e}_j$ در فضای ستونی $\mathbf{B}$ یعنی در T است، بنابراین

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{e}_j = \mathbf{A}\mathbf{e}_j + \mathbf{B}\mathbf{e}_j \in S + T.$$

پس هر ستون ماتریس $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ در $S + T$ قرار دارد و در نتیجه فضای ستونی $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ زیرفضایی از $S + T$ است:

$$\text{Col}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subseteq S + T.$$

در نتیجه

$$\text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \dim \text{Col}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \dim(S + T) \leq \text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B}).$$

به این ترتیب نابرابری برای $m = 2$ ثابت شد:

$$\text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B}).$$

اکنون از استقرا روی m استفاده می‌کنیم. گزاره‌ای که می‌خواهیم ثابت کنیم این است که برای هر $m \geq 1$ و ماتریس‌های مربعی $n \times n$

$$\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$$

داریم

$$\text{rank}\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \text{rank}(\mathbf{A}_i).$$

پایه استقرا، یعنی حالت $m = 1$ ، همان‌طور که گفته شد بدیهی است، و برای $m = 2$ نیز نابرابری را در بالا ثابت کردیم. حال فرض استقرایی را به این صورت در نظر می‌گیریم: فرض کنید نابرابری برای $m - 1$ ماتریس برقرار است، یعنی

$$\text{rank}\left(\sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{A}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m-1} \text{rank}(\mathbf{A}_i).$$

می‌خواهیم نشان دهیم که همین نوع نابرابری برای m ماتریس برقرار است. مجموع $\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i$ را به صورت جمع دو ماتریس در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم $\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{A}_i$. در این صورت

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i = \mathbf{B} + \mathbf{A}_m.$$

حالا از نابرابری ثابت شده برای دو ماتریس استفاده می‌کنیم. برای دو ماتریس $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}_m$ داریم

$$\text{rank}(\mathbf{B} + \mathbf{A}_m) \leq \text{rank}(\mathbf{B}) + \text{rank}(\mathbf{A}_m).$$

یعنی

$$\text{rank}\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i\right) = \text{rank}(\mathbf{B} + \mathbf{A}_m) \leq \text{rank}(\mathbf{B}) + \text{rank}(\mathbf{A}_m).$$

اکنون از فرض استقرایی روی $\mathbf{B}$ استفاده می‌کنیم. طبق فرض استقرا:

$$\text{rank}(\mathbf{B}) = \text{rank}\left(\sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{A}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m-1} \text{rank}(\mathbf{A}_i).$$

پس

$$\text{rank}\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{m-1} \text{rank}(\mathbf{A}_i)\right) + \text{rank}(\mathbf{A}_m) = \sum_{i=1}^m \text{rank}(\mathbf{A}_i).$$

بنابراین، اگر نابرابری برای $m - 1$ ماتریس برقرار باشد، برای m ماتریس هم برقرار است. با توجه به اینکه این نابرابری را برای $m = 1$ و $m = 2$ بررسی کرده‌ایم، با اصل استقرا نتیجه می‌گیریم که برای هر $m \geq 1$ داریم:

$$\text{rank}\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \text{rank}(\mathbf{A}_i).$$

حال نشان می‌دهیم شرط کافی برای برقراری تساوی در حالت $m = 2$ این است که فضای سطری و ستونی $\mathbf{A}$ به ترتیب بر فضای سطری و ستونی $\mathbf{B}$ عمود باشند. فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس مربعی $n \times n$ باشند و فضای ستونی $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ بر فضای ستونی $\mathcal{C}(\mathbf{B})$ و همچنین فضای سطری $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ بر فضای

سطری $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ عمود باشد؛ یعنی ستون‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو زیرفضای متعامد از $\mathbb{R}^n$ را بسازند و سطرهاى $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نیز دو زیرفضای متعامد از $\mathbb{R}^n$ را تشکیل دهند. می‌خواهیم نشان دهیم

$$\text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B}).$$

بگذارید

$$r = \text{rank}(\mathbf{A}), \quad s = \text{rank}(\mathbf{B}).$$

از متعامد بودن فضاهاى ستونی $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ و $\mathcal{C}(\mathbf{B})$ در $\mathbb{R}^n$ نتیجه می‌شود که می‌توانیم یک پایه متعامد نرمال برای $\mathbb{R}^n$ انتخاب کنیم به‌صورتی که

$$u_1, \dots, u_r$$

یک پایه متعامد نرمال برای $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ و

$$u_{r+1}, \dots, u_{r+s}$$

یک پایه متعامد نرمال برای $\mathcal{C}(\mathbf{B})$ باشند و بقیه بردارها یعنی $u_{r+s+1}, \dots, u_n$ فضا را کامل کنند. به‌طور مشابه، از متعامد بودن فضاهاى سطری $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ و $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ در $\mathbb{R}^n$ یک پایه متعامد نرمال

$$v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}, v_{r+s+1}, \dots, v_n$$

برای $\mathbb{R}^n$ به‌دست می‌آوریم که در آن $v_1, \dots, v_r$ یک پایه متعامد نرمال برای $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ و $v_{r+1}, \dots, v_{r+s}$ یک پایه متعامد نرمال برای $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ است. اکنون ماتریس‌های متعامد

$$\mathbf{U} = [u_1 \ \dots \ u_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{V} = [v_1 \ \dots \ v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

را در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{A}' = \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{U}^T \mathbf{B} \mathbf{V}.$$

چون $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ متعامدند، ضرب چپ و راست در آن‌ها رتبه را تغییر نمی‌دهد، بنابراین

$$\text{rank}(\mathbf{A}') = \text{rank}(\mathbf{A}) = r, \quad \text{rank}(\mathbf{B}') = \text{rank}(\mathbf{B}) = s, \quad \text{rank}(\mathbf{A}' + \mathbf{B}') = \text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}).$$

ساختار $\mathbf{A}'$ را بررسی می‌کنیم. سطر i -ام $\mathbf{A}'$ برابر سطر i -ام $\mathbf{U}^T \mathbf{A}$ است که همان بردار $u_i^T \mathbf{A}$ می‌باشد. مؤلفه ستونی j -ام این سطر، ضرب داخلی u_i با ستون j -ام $\mathbf{A}$ است. اگر $i > r$ ، آنگاه u_i بر فضای ستونی $\mathbf{A}$ عمود است، پس بر هر ستون $\mathbf{A}$ عمود بوده و در نتیجه تمام این ضرب‌های داخلی صفر است و سطر i -ام $\mathbf{A}'$ صفر می‌شود. بنابراین فقط سطرهاى ۱ تا r در $\mathbf{A}'$ می‌توانند ناصفر باشند. از طرف دیگر، ستون j -ام $\mathbf{A}'$ برابر $\mathbf{U}^T \mathbf{A} v_j$ است. اگر $j > r$ ، آنگاه v_j در متمم متعامد فضای سطری $\mathbf{A}$ قرار دارد، یعنی $\mathbf{A} v_j = \mathbf{0}$ ، و در نتیجه ستون j -ام $\mathbf{A}'$ صفر است. پس فقط ستون‌های ۱ تا r در $\mathbf{A}'$ می‌توانند ناصفر باشند. بنابراین $\mathbf{A}'$ شکلی از نوع

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_. & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

دارد که در آن $\mathbf{A}_.$ یک ماتریس $r \times r$ است. چون $\text{rank}(\mathbf{A}') = r$ ، باید $\text{rank}(\mathbf{A}_.) = r$ باشد.

برای $\mathbf{B}'$ دقیقاً همین‌طور است، با این تفاوت که فضای ستونی $\mathcal{C}(\mathbf{B})$ در $\text{span}\{u_{r+1}, \dots, u_{r+s}\}$ و فضای سطری $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ در $\text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_{r+s}\}$ قرار دارد. بنابراین سطرهاى ۱ تا r و نیز سطرهاى بعد از $r+s$ در $\mathbf{B}'$ صفرند و فقط سطرهاى ۱ تا $r+s$ می‌توانند ناصفر باشند. به‌طور مشابه، فقط ستون‌های ۱ تا $r+s$ در $\mathbf{B}'$ می‌توانند ناصفر باشند. پس

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{B}_. & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

که در آن $\mathbf{B}_.$ یک ماتریس $s \times s$ با $\text{rank}(\mathbf{B}_.) = s$ است.

اکنون $\mathbf{A}' + \mathbf{B}'$ به صورت

$$\mathbf{A}' + \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_. & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{B}_. & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

درمی‌آید که یک ماتریس بلوکی قطری است. رتبه چنین ماتریسی برابر مجموع رتبه بلوک‌های قطری آن است، بنابراین

$$\text{rank}(\mathbf{A}' + \mathbf{B}') = \text{rank}(\mathbf{A}_.) + \text{rank}(\mathbf{B}_.) = r + s.$$

از طرفی $\text{rank}(\mathbf{A}' + \mathbf{B}') = \text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ ، پس

$$\text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B})$$

و مطلوب ثابت شد.