

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۴



دستگاه معادلات، فضا و زیرفضای برداری

کوییز اول

تاریخ برگزاری: ۱۴ اسفند ۱۴۰۳

پرسش ۱ (0.75 نمره)

با فرض این که $U = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \sum_{i=1}^n x_i) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ است. زیر فضای W از $\mathbb{R}^{n+1}$ را طوری مشخص کنید که $W \oplus U = \mathbb{R}^{n+1}$.

پرسش ۲ (0.75 نمره) با فرض $a, b \in \mathbb{R}$ این دستگاه را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= a \\ 2x + 2y + 3z &= b \\ 3x + 3y + 4z &= a + b\end{aligned}$$

تمام مقادیر a, b که دستگاه بالا جواب دارد را بیابید و جواب را بر حسب a, b بیان کنید.

پاسخ ۱ (نمره)

با توجه به تعریف زیرمجموعه U به صورت

$$U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1 + x_2 + \dots + x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

می‌توان مشاهده کرد که U یک زیرفضای n -بعدی از $\mathbb{R}^{n+1}$ است (زیرا جزء آخر هر بردار عضو U به صورت خطی از بقیه جزئیات تعیین می‌شود). مسئله این است که زیرفضایی W از $\mathbb{R}^{n+1}$ را طوری بیابیم که جمع مستقیم U و W ، کل فضای $\mathbb{R}^{n+1}$ را بدهد، یعنی

$$W \oplus U = \mathbb{R}^{n+1}.$$

یک ایده ساده این است که بعد مکمل U در $\mathbb{R}^{n+1}$ را یک فضای یک‌بعدی انتخاب کنیم. گزینه مناسب بدین صورت است:

$$W = \{(0, 0, \dots, 0, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

بررسی صحت انتخاب:

(آ) (مستقلاً بودن مجموع مستقیم)

ابتدا ثابت می‌کنیم که $W \cap U$ فقط بردار صفر را شامل می‌شود. فرض کنید برداری v همزمان متعلق به U و W باشد. از طرفی در W ، بردار v به شکل $(0, 0, \dots, 0, y)$ است و از طرفی، چون $v \in U$ ، باید وجود داشته باشد $x_1, \dots, x_n$ به طوری که

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

با تطبیق مؤلفه‌ها داریم:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$$

و بنابراین $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

اما مؤلفه آخر بردار در W برابر y است؛ پس $y = 0$. در نتیجه، $v = (0, 0, \dots, 0)$ که نشان می‌دهد:

$$W \cap U = \{0\}.$$

(ب) (نمایش تمام $\mathbb{R}^{n+1}$ به صورت جمع مستقیم)

هر بردار $r = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$r = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1 + \dots + x_n) + (0, 0, \dots, 0, x_{n+1} - (x_1 + \dots + x_n)).$$

در عبارت بالا، بردار اول عضو U و بردار دوم عضو W است. همچنین این نمایش یکتا است چرا که مؤلفه‌های $x_1, \dots, x_n$ دقیقاً از r گرفته شده و مؤلفه تکمیلی در W به صورت منحصر به فرد تعیین می‌شود.

بنابراین، با انتخاب

$$W = \{ (\cdot, \cdot, \dots, \cdot, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \in \mathbb{R} \}$$

داریم

$$W \oplus U = \mathbb{R}^{n+1}.$$

این زیرفضا W جواب مسئله است.

پاسخ ۲ (نمره)

ابتدا سیستم داده شده را به صورت معادلات زیر داریم:

$$\begin{aligned} (۱) \quad & x + y + ۲z = a \\ (۲) \quad & ۲x + ۲y + ۳z = b \\ (۳) \quad & ۳x + ۳y + ۴z = a + b \end{aligned}$$

گام به گام با روش row reduced echelon form حل می‌کنیم.

۱. تشکیل ماتریس افزوده:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & a \\ ۲ & ۲ & ۳ & b \\ ۳ & ۳ & ۴ & a+b \end{array} \right]$$

۲. حذف ضرایب در سطرهای ۲ و ۳ نسبت به سطر ۱:

• سطر ۲ را به دست می‌آوریم:

$$\text{Row}_2 \leftarrow \text{Row}_2 - ۲ \times \text{Row}_1$$

$$\text{ضریب } x: ۲ - ۲ \times ۱ = ۰$$

$$\text{ضریب } y: ۲ - ۲ \times ۱ = ۰$$

$$\text{ضریب } z: ۳ - ۲ \times ۲ = ۳ - ۴ = -۱$$

$$\text{سمت راست: } b - ۲a$$

بنابراین سطر ۲ جدید معادله زیر را نمایش می‌دهد:

$$-۱z = b - ۲a \implies z = ۲a - b$$

• سطر ۳ را نیز اصلاح می‌کنیم:

$$\text{Row}_3 \leftarrow \text{Row}_3 - ۳ \times \text{Row}_1$$

$$\text{ضریب } x: ۳ - ۳ \times ۱ = ۰$$

$$\text{ضریب } y: ۳ - ۳ \times ۱ = ۰$$

$$\text{ضریب } z: ۴ - ۳ \times ۲ = ۴ - ۶ = -۲$$

$$\text{سمت راست: } (a+b) - ۳a = b - ۲a$$

بنابراین سطر ۳ جدید معادله زیر را دارد:

$$-۲z = b - ۲a$$

ماتریس افزوده تا به این مرحله:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & a \\ ۰ & ۰ & -۱ & b - ۲a \\ ۰ & ۰ & -۲ & b - ۲a \end{array} \right]$$

۳. تعیین شرط سازگاری:

از معادله سطر ۲:

$$-۱z = b - ۲a \implies z = ۲a - b$$

اما سطر ۳ نیز نشان می‌دهد:

$$-۲z = b - ۲a$$

با جایگذاری z از سطر ۲ در سطر ۳ داریم:

$$-۲(۲a - b) = b - ۲a$$

$$-۴a + ۲b = b - ۲a$$

$$-۴a + ۲b - b + ۲a = ۰$$

$$-2a + b = 0$$

$$b = 2a$$

بنابراین برای اینکه سیستم (consistency) داشته باشد، لازم است:

$$b = 2a$$

۴. جایگذاری شرط سازگاری و یافتن جواب:

با داشتن $b = 2a$ از معادله سطر ۲:

$$z = 2a - b = 2a - 2a = 0$$

حال معادله سطر ۱:

$$x + y + 2 \times 0 = a \implies x + y = a$$

این معادله، رابطه‌ای بین x و y ارائه می‌دهد که یک معادله با دو مجهول است؛ بنابراین یکی از متغیرها می‌تواند پارامتر آزاد تلقی شود. فرض می‌کنیم:

$$y = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

سپس:

$$x = a - t$$

۵. نتیجه نهایی:

شرط سازگاری معادلات: $b = 2a$

و در این صورت، جواب کلی سیستم:

$$\begin{cases} x = a - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

بنابراین، دستگاه معادلات جواب دارد اگر و تنها اگر $b = 2a$ ، و حل کلی دستگاه به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ به صورت گفته شده می‌باشد.