

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضان
بهار ۱۴۰۴



استقلال خطی، بعد و پایه، مرتبه و زیرفضا

کوییز دوم

تاریخ: ۲۴ فروردین ۱۴۰۴

پرسش ۱ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. اگر $\text{rank}(A) = r$ باشد، آنگاه ثابت کنید نامساوی زیر برقرار است:

$$\text{rank}(A^T) \geq 2r - n.$$

پرسش ۲ فرض کنید L ماتریسی $n \times n$ و $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ می‌باشد. اگر فرض کنیم z برداری است که $z \in V$ و $L^{k-1}z \neq 0$ اما $L^k z = 0$ ، اثبات کنید بردارهای $z, Lz, L^2z, \dots, L^{k-1}z$ مستقل خطی هستند. (فرض کنید $k < n$)

پاسخ ۱ رتبه‌ی A^T با رتبه‌ی A و بعد اشتراک فضای ستونی A با فضای تهی A مرتبط است. به‌طور خاص داریم:

$$\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A) - \dim(\text{col}(A) \cap \text{null}(A)),$$

که در آن:

- $\text{col}(A)$: فضای ستونی A ،
- $\text{null}(A)$: فضای تهی A ،
- $\dim(\text{col}(A) \cap \text{null}(A))$: بعد اشتراک فضای ستونی و فضای تهی A

است.

از قضیه‌ی $\text{rank} - \text{nullity}$ می‌دانیم:

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n.$$

و با توجه به $\text{rank}(A) = r$:

$$\text{nullity}(A) = n - r.$$

از طرفی اشتراک $\text{col}(A) \cap \text{null}(A)$ شامل بردارهایی است که هم در فضای ستونی A و هم در فضای تهی A قرار دارند. بعد این اشتراک حداکثر برابر است با:

$$\min(\text{rank}(A), \text{nullity}(A)).$$

با توجه به $\text{rank}(A) = r$ و $\text{nullity}(A) = n - r$ داریم:

$$\dim(\text{col}(A) \cap \text{null}(A)) \leq \min(r, n - r).$$

بنابراین:

$$\dim(\text{col}(A) \cap \text{null}(A)) \leq n - r.$$

در نهایت، با استفاده از رابطه:

$$\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A) - \dim(\text{col}(A) \cap \text{null}(A)),$$

و جایگذاری $\text{rank}(A) = r$ و $\dim(\text{col}(A) \cap \text{null}(A)) \leq n - r$ به دست می‌آوریم:

$$\text{rank}(A^T) \geq r - (n - r).$$

$$\text{rank}(A^T) \geq 2r - n.$$

و حکم ثابت می‌شود.

پاسخ ۲ در ابتدا ترکیب خطی بردارهای داده شده را با ضرایب فرضی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ نوشته و برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\alpha_1 z + \alpha_2 Lz + \dots + \alpha_k L^{k-1}z = 0$$

نکته:

$$L^k z = 0 \wedge n > k \Rightarrow L^n z = 0$$

'null space'

اگر دو طرف عبارت اولیه را در L^{k-1} ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\alpha_1 L^{k-1} z + \alpha_2 L^k z + \dots + \alpha_k L^{2k-1} z = 0$$

بر اساس صورت سوال می‌دانیم $L^{k-1} z \neq 0$ ، پس برای آن که عبارت کلی باقی مانده صفر شود، ضریب α_1 باید صفر باشد. بر اساس نتایج بالا، عبارت جدید بدست آمده برابر است با:

$$\alpha_2 L z + \alpha_3 L^2 z + \dots + \alpha_k L^{k-1} z = 0$$

اگر مانند قبل، تمام عبارت را از سمت چپ در L^{k-2} ضرب کنیم، به مانند قبل به عبارت $\alpha_2 L^{k-1} z = 0$ خواهیم رسید و بر اساس توضیحات داده شده قبلی مقدار α_2 صفر خواهد بود. اگر بر اساس همین رویه پیش برویم، خواهیم دید که تمام α ها صفر خواهند شد و اثبات کامل می‌شود.